ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/353400777

العامة الرياضيات 1

Book · January 2016

DOI: 10.13140/RG.2.2.21071.00168

CITATIONS
0

READS
304

2 authors, including:

Raid Salha
Islamic University of Gaza
43 PUBLICATIONS **63** CITATIONS

SEE PROFILE

All content following this page was uploaded by Raid Salha on 23 July 2021.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

الرياضيات العامة 1

2016

رائد بشير صالحة

أستاذ مشارك – قسم الرياضيات

كلية العلوم – الجامعة الاسلامية

غزة

أروى عيد عاشور

أستاذ مشارك – قسم الرياضيات

كلية العلوم – الجامعة الاسلامية

غزة

قسم الرياضيات - الجامعة الاسلامية بغزة

الرياضيات العامة 1

رائد بشير صالحة

أستاذ مشارك – قسم الرياضيات

كلية العلوم – الجامعة الاسلامية

غزة

أروى عيد عاشور

أستاذ مشارك – قسم الرياضيات

كلية العلوم – الجامعة الاسلامية

غزة

2016

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات ..... أ

فهرس الجداول ..... و

فهرس الأشكال ..... ز

المقدمة 1

الوحدة الأولى 5

المجموعات و العمليات عليها 5

(1-1) المجموعة و العنصر 6

(1-2) طرق التعبير عن المجموعات 7

(1-3) أنواع المجموعات 9

(1-4) أشكال فن 17

(1-5) العمليات على المجموعات 21

(1-6) قوانين دي مورجان 28

تمارين على الوحدة الأولى 30

الوحدة الثانية 33

مجموعات الأعداد و العمليات عليها 33

(2–1) مجموعات الأعداد 34

(2–2) العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية 38

(2–3) العمليات الحسابية على الأعداد النسبية 42

(2–4) تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد 50

(2–5) الفترات 57

(2–6) الأعداد المركبة 60

(2–7) العمليات على الأعداد المركبة 65

تمارين على الوحدة الثانية 71

الوحدة الثالثة 75

العلاقات و الاقترانات 75

(3–1) الزوج المرتب 76

(3–2) ضرب المجموعات 80

(3–3) العلاقة 83

(3–4) خواص العلاقات 87

(3–5) الاقترانات 96

(3–6) خواص الاقترانات 98

(3–7) اقترانات خاصة 102

تمارين على الوحدة الثالثة 117

الوحدة الرابعة 123

الكسور 123

(4–1) تحويل الكسور العادية إلى كسور عشرية 125

(4–2) تحويل الكسور العشرية إلى كسور عادية 126

(4–3) اختبارات قابلية القسمة 131

(4–4) القاسم المشترك الأكبر 134

(4–5) طرق إيجاد القاسم المشترك الأكبر 138

(4–6) المضاعف المشترك الأصغر(الأدنى) 140

(4–7) طرق إيجاد المضاعف المشترك الأصغر(الأدنى) 142

تمارين على الوحدة الرابعة 144

الوحدة الخامسة 145

كثيرات الحدود والعمليات عليها 145

(5–1) قوانين الأسس 146

(5–2) الأسس الكسرية (الجذور) 149

(5–3) كثيرات الحدود 152

(5–4) جمع كثيرات الحدود 155

(5–5) طرح كثيرات الحدود 156

(5–6) ضرب كثيرات الحدود 158

(5–7) خواص عمليات جمع، طرح و ضرب كثيرات الحدود 159

(5–8) قسمة كثيرات الحدود 160

تمارين على الوحدة الخامسة 164

الوحدة السادسة 167

المعادلات و المتباينات 167

(6–1) تحليل المقادير الجبرية 168

(6–2) المعادلات من الدرجة الأولى (الخطية) 174

(6–3) المعادلات من الدرجة الثانية (التربيعية) 176

(6–4) العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملاتها 183

(6–5) المتباينات 185

(6–6) الخواص الأساسية للمتباينات 186

(6–7) المتباينات الخطية 187

(6–8) المتباينات التربيعية 189

تمارين على الوحدة السادسة 192

الوحدة السابعة 195

المنطق الرياضي 195

(7–1) العبارات المنطقية البسيطة و المركبة 196

(7–2) الروابط المنطقية و جداول الصدق 198

(7–3) العبارات المتكافئة و العبارات المتناقضة 205

تمارين على الوحدة السابعة 207

أسئلة عامة 209

المراجع 219

قائمة بالمراجع العربية 219

قائمة بالمراجع الأجنبية 220

دليل المصطلحات العلمية 221

فهرس الجداول

جدول (3−1): التمثيل الجدولي لحاصل الضرب الديكارتي A×B 82

جدول (5–1): قوانين الأسس 148

جدول (5–2): أمثلة لكثيرات الحدود 153

جدول (7–1): جدول الصدق للعبارة $P \wedge Q$ 199

جدول (7–2): جدول الصدق للعبارة $P \vee Q$ 200

جدول (7–3): جدول الصدق للعبارة $\neg P$ 201

جدول (7–4): جدول الصدق للعبارة $P \longrightarrow Q$ 202

جدول (7–5): جدول الصدق للعبارة $P \longleftrightarrow Q$ 203

فهرس الأشكال

شكل (1–1): مثال على مجموعات متداخلة 12

شكل (1–2): تمثيل اتحاد مجموعتين باستخدام أشكال فن 22

شكل (1–3): تمثيل تقاطع مجموعتين باستخدام أشكال فن 23

شكل (1–4): تمثيل الفرق بين مجموعتين(A–B) باستخدام أشكال فن 24

شكل (1–5): تمثيل الفرق بين مجموعتين (B – A) باستخدام أشكال فن 25

شكل (1–6): تمثيل متممة (مكملة) مجموعة باستخدام أشكال فن 26

شكل (2–1): مجموعات الأعداد 37

شكل (2–2): خط الأعداد 50

شكل(2–3): تمثيل العدد المركب $z = x + yi$ بيانيا. 63

شكل(2–4): تمثيل الأعداد المركبة مثال(26) بيانيا 64

شكل (3–1): المستوى الديكارتي 77

شكل (3–2): مثال لتمثيل نقطة على المستوى الديكارتي 78

شكل (3–3): مثال لتمثيل ثلاث نقاط على المستوى الديكارتي 79

شكل (3–4): التمثيل البياني لحاصل الضرب الديكارتي A×B 82

شكل (3–5) : التمثيل السهمي لحاصل الضرب الديكارتي 83

شكل (3-6) : التمثيل السهمي للعلاقة المتعدية 90

شكل (3-7) : التمثيل البياني للاقتران المحايد 105

شكل (3-8) : التمثيل البياني لمثال(43) 109

شكل(3-9) : التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة 115

شكل (5-1): مثال على طريقة القسمة المطولة(الطويلة) 162

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على خاتم الأنبياء و المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه و على آله و صحبه أجمعين.

لقد بذلنا جهدا متواصلا في إعداد هذا الكتاب ليكون المرجع الرئيسي لمقرر الرياضيات العامة (1) من مقررات التربية / تخصص تعليم أساسي، بعد خبرتنا الطويلة في تدريس هذه المادة و شعورنا بحاجة الطالب لمرجع يشمل كل مفردات المادة بتفاصيلها. كذلك نحن نهدف ليكون هذا الكتاب مادة ثقافية لكثير من طلاب العلم فلقد تناولنا فيه الموضوعات الهامة الأساسية التي يحتاجها طالب العلم للتعرف على مفهوم المجموعات وأهم العمليات عليها و كأمثلة على المجموعة درسنا مجموعة الأعداد الطبيعية، مجموعة الأعداد الصحيحة، مجموعة الأعداد النسبية، مجموعة الأعداد الحقيقية و مجموعة الأعداد المركبة. كما تعرفنا على العمليات الحسابية على هذه المجموعات. ثم تناولنا موضوع العلاقات بين مجموعتين و أهم أنواع العلاقات و كحالات خاصة من العلاقات درسنا الاقترانات وأهم المفاهيم الرياضية المرتبطة بها مثل المجال، المجال المقابل، المدى. كما ناقشنا أهم أنواع الاقترانات، ودرسنا بعض الاقترانات الخاصة مثل الاقتران الخطي، الاقتران التربيعي و اقتران القيمة المطلقة واستكمالا لمجموعات الأعداد و العمليات عليها أفردنا وحدة كاملة لدراسة موضوع الكسور بنوعيها العادية و العشرية و التحويل من أحد النوعين للأخر و تناولنا موضوع المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر. ثم درسنا كثيرات الحدود و العمليات عليها و كمدخل لها تناولنا موضوع الأسس وأهم قوانينها. ثم انتقلنا لدراسة بعض أنواع المعادلات و المتباينات في متغير واحد وطرق حلها وكمدخل لذلك درسنا بعض أنواع المقادير الجبرية وطرق تحليلها. و ختمنا دراستنا بعرض موجز لموضوع المنطق الرياضي و مفاهيمه الأساسية.

لقد حاولنا في هذا الكتاب تبسيط و تسهيل فهم هذه المواضيع من خلال استخدام العديد من الأمثلة و الملاحظات مما يجعل القارئ قادرا على فهم المادة بكل سهولة و يسر.

و لقد قسمنا مواضيع الكتاب إلى سبع وحدات و هي كالتالي:

1. **الوحدة الأولى:** تناولت هذه الوحدة موضوع المجموعات و العمليات عليها و ركزت على مفهوم العنصر و المجموعة وأنواع المجموعات و خصائصها و تمثيل المجموعات باستخدام أشكال ڤن.

2. **الوحدة الثانية:** درسنا في هذه الوحدة مجموعات الأعداد المختلفة و العمليات الحسابية عليها و خواص هذه العمليات كما درسنا كيفية تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد بالإضافة إلى موضوع الفترات بأنواعها وتمثيلها بيانيا.

3. **الوحدة الثالثة:** تعرضنا في هذه الوحدة لموضوع مهم وهو العلاقات بين المجموعات وأنواعها و كحالات خاصة من هذه العلاقات درسنا الاقترانات وأهم المفاهيم الرياضية المرتبطة بها مثل المجال، المجال المقابل، المدى وغيرها. كما ناقشنا أهم أنواع الاقترانات، بالإضافة إلى بعض الاقترانات الخاصة مثل الاقتران الخطي، الاقتران التربيعي و اقتران القيمة المطلقة.

4. **الوحدة الرابعة:** تناولت هذه الوحدة موضوع الكسور بنوعيها العادية و العشرية وكيفية التحويل من أحد النوعين إلى الآخر و طرق ايجاد كل من القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر بالإضافة إلى بعض اختبارات القسمة.

5. **الوحدة الخامسة:** درسنا في بداية هذه الوحدة موضوع الأسس وقوانينها كمدخل لموضوع كثيرات الحدود. ثم تناولنا موضوع كثيرات الحدود وأهم المفاهيم المرتبطة به و العمليات عليها، الجمع ، الطرح و الضرب كما درسنا موضوع القسمة باستخدام القسمة المطولة و كيفية ايجاد باقي القسمة باستخدام نظرية الباقي.

6. **الوحدة السادسة:** تناولت هذه الوحدة عدة مواضيع مهمة تتعلق بالمقادير الجبرية و هي بعض أنواع المقادير الجبرية مثل الفرق بين المربعين، المربع الكامل و طرق تحليلها، كما تناولت الوحدة السادسة أيضا المعادلات و المتباينات في متغير واحد و طرق حلها.

7. **الوحدة السابعة:** تناولنا فيها موضوعاً مهماً و هو المنطق الرياضي واحتوت هذه الوحدة على مفهوم العبارة و أنواعها و الروابط بين العبارات و جداول الصدق و العبارات المتكافئة و المتناقضة.

وفي نهاية الكتاب ستكون هناك مجموعة من الأسئلة العامة لمساعدة دارس هذا الكتاب على فهم المحتوى العلمي و قياس مدى استيعابه.

ولقد اعتمدنا في شرحنا لمفردات الكتاب على الأسلوب العلمي الذي يتصف بالدقة الرياضية و البساطة و التسلسل المنطقي في عرض المادة العلمية بالإضافة إلى إعطاء الأمثلة و التمارين لتحقيق الفهم الكامل و استيعاب المادة العلمية في الكتاب. و أملنا أن يجد كل مهتم بالرياضيات و تدريسها في هذا الكتاب ما يعينه على أداء مهمته في تدريس الرياضيات لطلبة المرحلة الأساسية الدنيا.

ومما يسرنا أن نستمع إلى أراء الدارسين و المختص حول ما جاء في هذا الكتاب لأن كل عمل بشرى يعتريه النقص والكمال لله وحده فلا يبخلوا علينا بنصائحكم وأخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

المؤلفان

د. رائد بشير صالحة د. أروى عيد عاشور

الوحدة الأولى

المجموعات و العمليات عليها

(1–1) المجموعة و العنصر

(2–1) طرق التعبير عن المجموعات.

(3–1) أنواع المجموعات

(4–1) أشكال ڤن

(5–1) العمليات على المجموعات

(6–1) قوانين دي مورجان

في هذه الوحدة سندرس مفهوم المجموعة وما يتعلق بها من مفاهيم مثل العنصر و كيفية التعبير عن المجموعة كما سنتعرض لأهم أنواع المجموعات و العمليات المعرفة عليها و اهم خصائصها وكيفية تمثيلها بأشكال ڤن.

(1-1) المجموعة و العنصر

تعريف (1): المجموعة هي تجمُّع من الأشياء المحسوسة أو الأفكار.
أي عدد من الأشياء المحددة (التي لا يمكن الخلط بينها) و المتمايزة (التي يمكن التمييز بينها و بين غيرها) تشكل مجموعة، ويُرمز للمجموعات عادة بالأحرف الكبيرة مثل: X, Y, A, B .

مثال(1) : التجمعات الآتية تكون مجموعات

- الدول العربية التي لها حدود مشتركة مع فلسطين.
- أيام الأسبوع.
- الأحرف الأبجدية العربية.

بينما التجمعات الآتية لا تكون مجموعات

- بعض الدول المصدرة للبترول.
- الطالبات في الصف.
- المباني الجميلة.
- ثلاثة ألوان.

تعريف(2): تسمى الأشياء التي تشكل المجموعة عناصر أو أعضاء المجموعة. ويُرمز للعناصر بالأحرف الصغيرة مثل: *x, y, a, b* .

وإذا أردنا أنْ نبيَّن أنَّ عنصراً ما موجود في مجموعة معينة, نعبر عن ذلك رياضيا كما يأتي:

- إذا كان العنصر x هو أحد عناصر المجموعة A يقال أن x ينتمي إلى A ونكتب: $x \in A$.
- أما إذا كان العنصر x ليس عنصرا في المجموعة A يقال أن x لا ينتمي إلى A ونكتب: $x \notin A$.

مثال(2): مجموعة الدول العربية التي لها حدود مشتركة مع فلسطين ∈ الأردن

بينما

مجموعة الدول العربية التي لها حدود مشتركة مع فلسطين ∉ العراق .

(2-1) طرق التعبير عن المجموعات

يُعبّر عن المجموعة بإحدى الطريقتين التاليتين:

1) **طريقة السرد (الحصر)** : و ذلك بذكر عناصر المجموعة بين الحاصرتين { } مع وضع فاصلة بين كل عنصرين و دون أهمية للترتيب و بدون تكرار.

مثال(3):

1- مجموعة الحروف المكونة لكلمة car هي: $X = \{c, a, r\}$.

2- مجموعة الأعداد الزوجية الأكبر من 1 و الأقل من 10 هي : $Y = \{2,4,6,8\}$.

3- مجموعة مضاعفات العدد 3 الأكبر من 3 و الأقل من 100 هي :

$Z = \{6,9,12, \dots ,99\}$, حيث تشير النقط "..." إلى الاستمرار في كتابة العناصر حسب النمط السابق لها حتى العدد 99.

2) طريقة الوصف : و تتم هذه الطريقة بذكر الخواص التي تميز عناصر المجموعة عن غيرها من العناصر و يكون ذلك أيضا بين الحاصرتين { } .

مثال(4):

1- مجموعة الحروف المكونة لكلمة car هي:

$X = \{x:$ car حرف من حروف كلمة $x\}$.

2- مجموعة الأعداد الزوجية الأكبر من 1 و الأقل من 10 هي :

$Y = \{y:$ 10 عدد زوجي موجب أقل من $y\}$.

3- مجموعة مضاعفات العدد 3 الأكبر من 3 والأقل من 100 يمكن التعبير عنها كما يأتي:

$Z = \{z:$ 100 من مضاعفات العدد 3 الأكبر من 3 والأقل من $z\}$ أو

$Z = \{z :$ 3 من مضاعفات العدد z ، $3 < z < 100\}$ أو

$Z = \{z : z = 3n,\ 3 < z < 100$ ، n عدد طبيعي $\}$

ملاحظة (1):

1. لا يجوز التكرار في عناصر المجموعات حيث $\{a,a,b,c,c\} = \{a,b,c\}$.
2. لا نهتم بترتيب عناصر المجموعات حيث $\{a,b,c\} = \{b,c,a\}$.
3. لا يجوز استخدام القوسين ( ) أو [ ] ولكن نستخدم القوسين { } .

(1-3) أنواع المجموعات

من المهم عند التعامل مع المجموعات أن نقارن مجموعة بمجموعة أخرى. وقد أطلق الرياضيون تسميات لأنواع عدة من المجموعات، وذلك بغرض تصنيفها. وهذه التسميات تتعلق بعدد عناصر المجموعة وبطبيعة علاقة المجموعات فيما بينها . وهناك عشرة أنواع رئيسية من المجموعات هي :

1. المجموعات المنتهية .
2. المجموعات غير المنتهية .
3. المجموعات الخالية .
4. المجموعات وحيدة العنصر.
5. المجموعات المتكافئة.
6. المجموعات المتساوية .
7. المجموعات المتداخلة .
8. المجموعات المنفصلة.
9. المجموعات الشاملة.
10. المجموعات الجزئية .

وكل مجموعة يمكن أن تكون ضمن واحدة أو أكثر من هذه التسميات.

1- المجموعات المنتهية.

المجموعات المنتهية هي المجموعات التي لها عدد محدود من العناصر. أي أنه في المجموعات المنتهية نستطيع حصر عدد العناصر. وفي هذه الحالة نقول أن المجموعة تحتوي على n من العناصر المختلفة حيث n عدد صحيح غير سالب. فمثلاً، مجموعة أشهر السنة الهجرية و مجموعة أيام الأسبوع تعد مجموعات منتهية .

تعريف (3): رتبة المجموعة المنتهية، تعني عدد عناصر المجموعة المنتهية و يُرمز لها بالرمز $|X|$ و التي تمثل عدد عناصر المجموعة X .

مثال(5): أوجد رتب المجموعات الآتية:

1. X= مجموعة الأرقام $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.
2. Y = مجموعة مضاعفات العدد 3 الأكبر من 3 والأقل من 100.
3. Z = مجموعة أبواب المسجد الأقصى.

الحل:

1. **5.**
2. **32.**
3. **15.**

2- المجموعات غير المنتهية.

هي المجموعات التي يكون عدد عناصرها غير محدود بحيث لا نستطيع حصر عدد عناصرها. فمجموعة الأعداد التي نستخدمها في العد مثلا تشكِّل مجموعة غير منتهية: 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 وهكذا بدون توقف .ومن المستحيل كتابة عناصر المجموعة غير المنتهية كلها، ولوصف عناصر مجموعة كهذه نكتب العناصر القليلة الأولى، ثم نضع ثلاث نقاط لتوضيح أن عدد العناصر غير محدود كما يأتي: {1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... }. كذلك مجموعة مضاعفات العدد 5 مجموعة غير منتهية.

3- المجموعات الخالية.

هي المجموعات التي لا تحتوي على أي عنصر. فمثلاً إذا كانت المجموعات الآتية تمثِّل قائمة التلاميذ الغائبين في مدرسة معينة خلال ثلاثة أيام، حيث تغيَّب يوم الاثنين صالح وأحمد، وفي يوم الثلاثاء خالد، وفي يوم الأربعاء لم يتغيب أحد. نلاحظ أن مجموعة الاثنين تحتوي على عنصرين، ومجموعة الثلاثاء تحتوي على عنصر واحد فقط، بينما لا تحتوي مجموعة الأربعاء على أي عنصر . ولذلك فإن مجموعة الأربعاء مجموعة خالية. ولكي نوضِّح أن مجموعة ما خالية، فإننا نعبر عنها كما يأتي: ϕ أو $\{\ \}$.

مثال(6): المجموعات الآتية مجموعات خالية

1. X= مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة بين 2 ، 4.
2. Y= مجموعة الأسماك التي تعيش في الفضاء.
3. Z= مجموعة الأعداد الأولية المحصورة بين 8 ، 10.
4. T = مجموعة طلاب الجامعة الذين تبلغ أعمارهم 100عام.

أي أن $X = Y = Z = T = \phi$ أو $X = Y = Z = T = \{\ \}$.

ملاحظة (2) : رتبة المجموعة الخالية تساوي صفر لخلوها من العناصر وبالتالي عدد عناصرها يساوي الصفر.

4- المجموعات وحيدة العنصر.

هي المجموعات التي تحوي عنصرًا واحداً فقط. أي أن رتبتها = 1.

مثال(7): إذا كانت $X = \{x : x$ عدد أولي زوجي$\}$ فإن $X=\{2\}$. أي أن X مجموعة وحيدة العنصر.

5- المجموعات المتكافئة.

هي المجموعات التي لها نفس العدد من العناصر، بمعنى أن كل مجموعتين تكونان متكافئتين إذا أمكن مقابلة عناصرهما عنصراً لعنصر. فمثلاً إذا كان عدد الأدراج في أحد القاعات مساوياً لعدد الطلاب، فإن مجموعة الأدراج مكافئة لمجموعة الطلاب.

6- المجموعات المتساوية .

هي المجموعات التي لها نفس العناصر. فإذا فرضنا أن X هي مجموعة الطلاب الذين حصلوا على العلامة الكاملة في اختبار الإحصاء في إحدى الشعب وكانت :

$X=$ { رائد، ياسر، محمد، عمر }. وإذا فرضنا أن Y هي مجموعة الطلاب الذين حصلوا على العلامة الكاملة في اختبار الرياضيات العامة 1 في نفس الشعبة وكانت : $Y=$ {عمر، محمد، ياسر، رائد}. عندئذ X تساوي Y لأن لكل منهما نفس العناصر التي للأخرى.
ولتوضيح أنهما متساويتان، نكتب: $Y = X$.

7- المجموعات المتداخلة .

هي المجموعات التي لها عناصر مشتركة فيما بينها. فبفرض أن طلبة الامتياز في كلية الطب للعام الماضي، هم جمال، وقاسم، وإبراهيم وأن طلبة الامتياز لهذا العام في كلية الطب هم رائد وقاسم وعمر، فإننا نلاحظ أن قاسم ينتمي لمجموعة طلبة الامتياز في العام الماضي، وكذلك لمجموعة طلبة الامتياز في هذا العام، أي أن المجموعتين متداخلتان، ويمكن إيضاح ذلك من خلال شكل (1-1)

شكل (1-1): مثال على مجموعتين متداخلتين

8- المجموعات المنفصلة.

هي المجموعات التي لا تحتوي على أي عناصر مشتركة فيما بينها فمثلا مجموعة أيام الأسبوع و مجموعة الأرقام التي أصغر من 7 مجموعتان منفصلتان.

9- المجموعات الشاملة.

هي المجموعات التي تحتوي على جميع العناصر تحت الاختبار في وقت ومسألة معينين، وعادة ما يرمز إليها بالرمز U. فإذا فرضنا في مسألة ما أننا نتعامل فقط مع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 10 ، تكون المجموعة الشاملة هي:

$$U = \{ 1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 \} .$$

وقد تكون المجموعة الشاملة في مسألة أخرى هي جميع الأعداد الزوجية، وفي حالة ثالثة جميع الطلاب في الجامعة و في حالة رابعة جميع الطلاب الذين يدرسون مساق الرياضيات العامة1.

10- المجموعات الجزئية.

هي المجموعات المتضمَّنَة (أو المحتواة) في مجموعات أخرى. فمجموعة الطلاب الذين يدرسون مساق الرياضيات العامة1 ، على سبيل المثال، مجموعة جزئية من مجموعة الطلاب في الجامعة.

و بذلك تكون المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B اذا و فقط اذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة A هو ايضا عنصر من عناصر المجموعة B. و يمكن التعبير عن هذه العلاقة بالصورة الآتية: $A \subseteq B$.

أما إذا وجد عنصر على الأقل في A و لا ينتمي إلى B فإن A لا تكون محتواه في (أو ليست مجموعة جزئية من) B و نعبر عن ذلك بالصورة الآتية: $A \not\subset B$.

تعريف(4): يقال ان المجموعة A مجموعة جزئية فعلية من المجموعة B اذا و فقط اذا كان كل عنصر من المجموعة A هو ايضا عنصر من عناصر المجموعة B وكان هناك عنصر واحد على الاقل من عناصر المجموعة B لا ينتمي الى المجموعة A.

سوف تمثل هذه العلاقة على الصورة: $A \subset B$.

مثال(8): إذا كانت $A = \{x:$ عدد زوجي $x\}$ و $B = \{x:$ عدد صحيح $x\}$ فان المجموعة A مجموعة جزئية فعلية من المجموعة B و ذلك لان كل عدد زوجي هو عدد صحيح, والعدد 1 مثلا ينتمي للمجموعة B و لا ينتمي للمجموعة A.

ملاحظة (3):

1. تكون المجموعتان A و B متساويتين اذا و فقط اذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة A هو ايضا عنصر من عناصر المجموعة B و أيضا اذا و فقط اذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة B هو ايضا عنصر من عناصر المجموعة A. و نعبر عن ذلك بالرموز كما يأتي: $A = B$ إذا و فقط اذا تحقق كلا الشرطين الآتيين:
   a. $A \subseteq B$.
   b. $B \subseteq A$.

2. إذا كانت A و B و C مجموعات بحيث أن $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$.

3. إذا كانت A و B مجموعتين فإن $A \subseteq B$ إذا و فقط اذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:
   a. $A \subset B$.
   أو
   b. $A = B$.

4. المجموعة الشاملة ليست و حيدة فمثلا:

إذا كانت $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{1,2,4,8\}$ فإن كل من المجموعات الآتية تصلح كمجموعة شاملة:

$U_1 =\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$U_2 =\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$U_3 =\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

و لذلك عند الحاجة للمجموعة الشاملة في مسألة ما, يشار إليها في نص المسألة.

5. إذا كانت U هي مجموعة شاملة و كانت X مجموعة ما فإن $X \subseteq U$.
6. لكل مجموعة X تكون $\phi \subseteq X$.

مثال(9): إذا كانت $X=\{1,2,3\}$

1. اوجد كل المجموعات الجزئية من المجموعة X.
2. اوجد كل المجموعات الجزئية الفعلية من المجموعة X.

الحل:

1. المجموعات الجزئية من X هي:

$$\phi, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}.$$

2. المجموعات الجزئية الفعلية من A هي:

$$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$$

مثال(10) : إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, \{2\}, 3\}$ فأي من العبارات التالية صحيحة

1. $A = B$ 2. $A \subset B$ 3. $B \subset A$
4. $\{2\} \subset B$ 5. $\{2\} \subset A$

الحل:

1. خاطئة 2. خاطئة 3. خاطئة 4. خاطئة 5. صحيحة.

تعريف(5): مجموعة القوة للمجموعة X هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة X.

يرمز لمجموعة القوة الخاصة بالمجموعة X بالرمز $P(X)$.

و يمكن التعبير عن مجموعة القوة للمجموعة X بالصورة التالية :

$$P(X)=\{A : A \subseteq X\}$$

مثال(11) : أوجد مجموعة القوة للمجموعة $X=\{1, 2, 3\}$.

الحل : $P(X)=\{\varphi, X, \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

ملاحظة (4) : إذا كان عدد عناصر المجموعة X يساوي n من العناصر فان عدد المجموعات الجزئية الممكن الحصول عليها يساوي 2^n . و يمكن التعبير عن ذلك بالرموز كما يأتي: إذا كان $n = |X|$, فإن $2^n = |P(X)|$.

مثال(12) : حدد صحة او عدم صحة العبارات التالية

1. $x \in \{\{x\}, \{x,y\}\}$
2. $x \subseteq \{\{x\}, \{x,y\}\}$
3. $\{1,x,2\} \subseteq \{1, 2, x\}$
4. $\{a,b\} \subset \{b, a\}$
5. $x \in \{x\}$
6. $\emptyset = \{\emptyset\}$

7. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

8. $\{\emptyset\} \in \emptyset$

9. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}$

10. $\emptyset \subseteq \emptyset$

11. $\emptyset \in \emptyset$

12. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

13. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

14. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

15. $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

16. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$

17. $\{a, b\} \in \{a, b, \{a, b\}\}$

18. $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

19. $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$

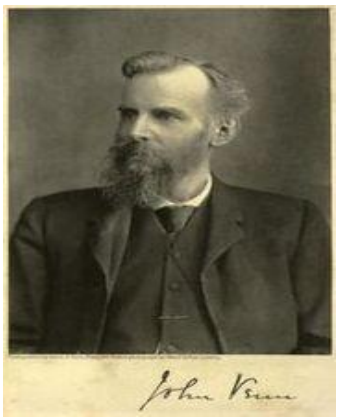
20. $\{\{a, \emptyset\}\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

الحل:

1. خاطئة
2. *خاطئة*
3. صحيحة
4. *خاطئة*
5. صحيحة
6. *خاطئة*
7. صحيحة
8. خاطئة
9. *خاطئة*
10. صحيحة
11. *خاطئة*
12. صحيحة
13. صحيحة
14. صحيحة
15. *خاطئة*
16. صحيحة
17. صحيحة
18. *خاطئة*.
19. صحيحة
20. صحيحة.

(1-4) أشكال ڤن

العالم الإنجليزي جون ڤن (4 أغسطس 1834 – 4 أبريل 1923) و كان عالم منطق و فيلسوف إنجليزي و قد اشتهر بإدخاله مخطط ڤن الذي يستخدم في العديد من المجالات بما في ذلك نظرية المجاميع، الاحتمالات, المنطق, الإحصاءات و علوم الكمبيوتر.



و لقد اقترح العالم فن طريقة سهلة لتمثيل المجموعات بالرسم و أطلق على هذه الرسوم اسم مخططات (أو أشكال) فن فهي أشكال تستعمل في نظرية المجموعات، لتوضيح العلاقات الرياضية أو المنطقية لمجموعة من الأشياء أو المفاهيم.

فلتمثيل مجموعة ما نرسم أي منحنى مغلق بسيط و نكتب عناصر المجموعة داخله والعناصر التي لا تنتمي للمجموعة تكتب خارجه. و لقد اتفق على تمثيل المجموعة الشاملة بشكل مستطيل مميز بالحرف U و تمثيل المجموعة الجزئية بدائرة مميزة بالحرف الذي يرمز إلى هذه المجموعة الجزئية، و ليكن X، بحيث تكون هذه الدائرة واقعة كلياً داخل مستطيل المجموعة الشاملة.

وإذا أردنا أن نبين مجموعة جزئية من U، فإننا نرسم دائرة أخرى داخل دائرة X.

و يتم تمثيل المجموعات المتداخلة بدوائر متداخلة تقع كلياً داخل مستطيل المجموعة الشاملة.

كما يتم تمثيل المجموعات المنفصلة بدوائر منفصلة عن بعضها البعض تقع كلياً داخل مستطيل المجموعة الشاملة.

مثال (13): إذا كانت $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$،

$X = \{a, b, c, d\}$ ، $Y = \{c, d, f, g\}$ و $Z = \{g, h\}$ و

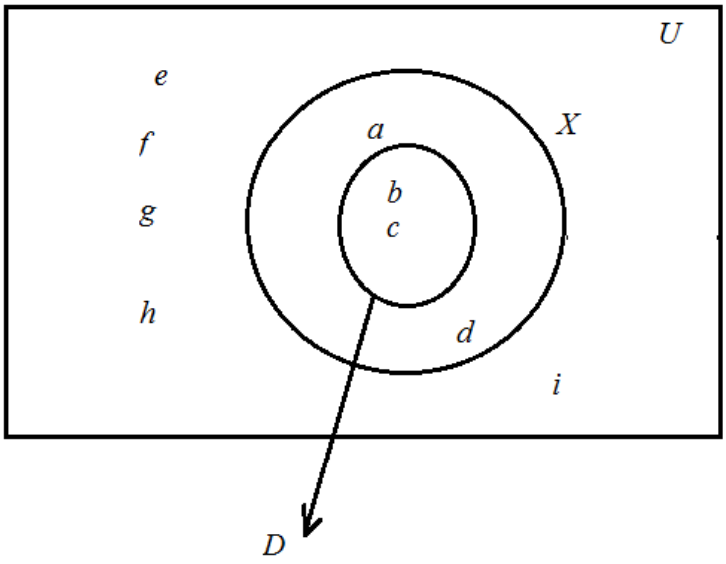
$D = \{b, c\}$

مثل كلا من المجموعات الآتية بأشكال فن:

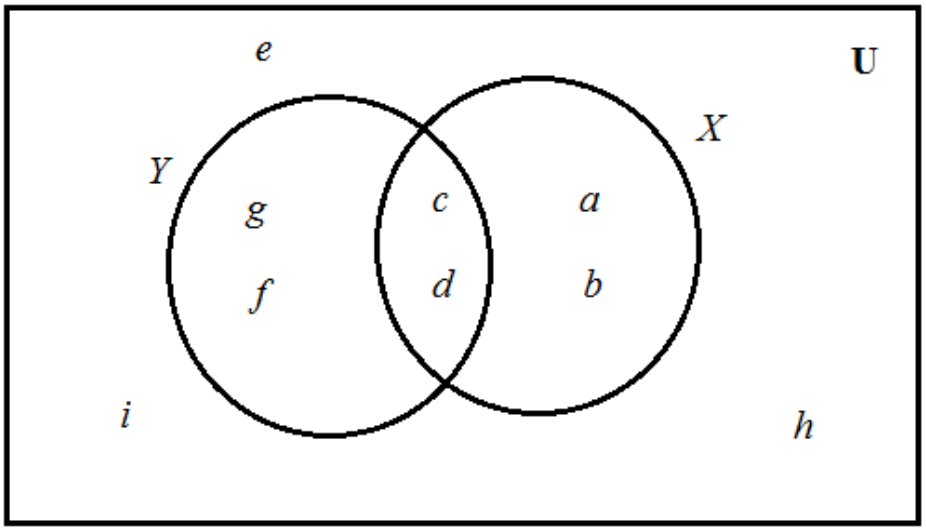
1. U, X, D .
2. U, X, Y .
3. U, X, Z .
4. U, X, Y, Z, D .

الحل:

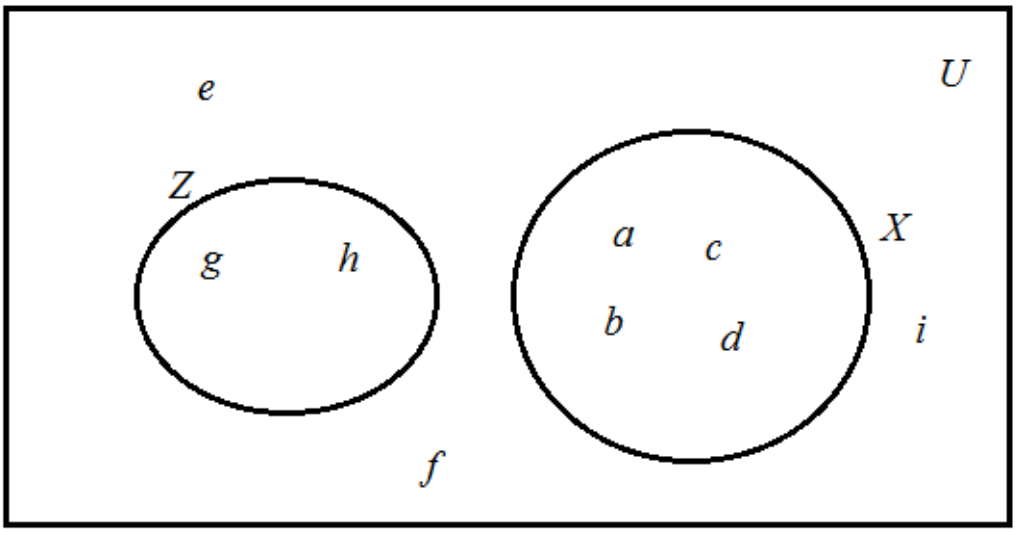
1.



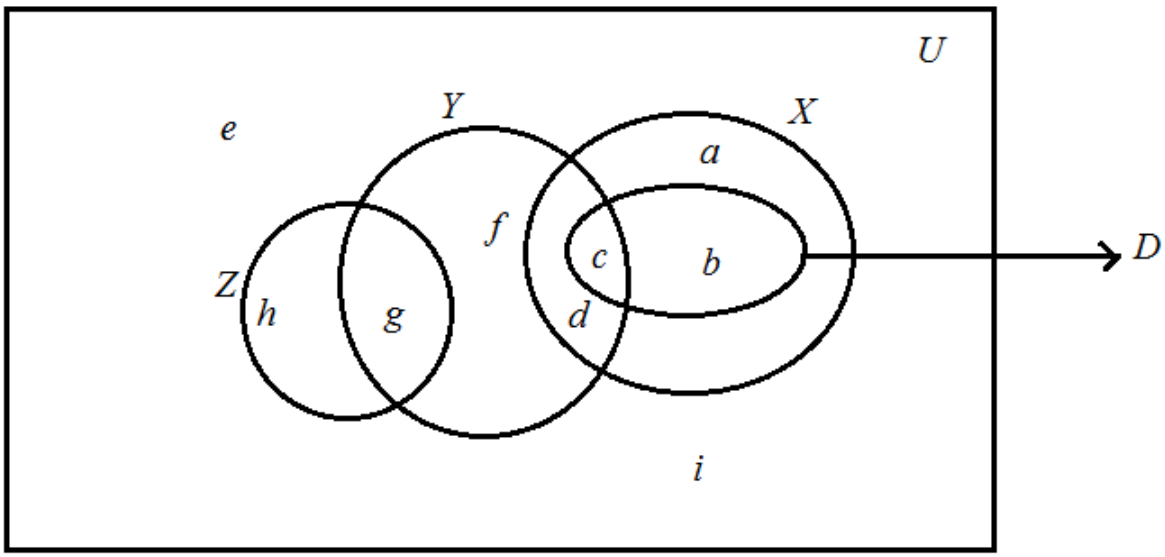
2.



.3



.4



(1–5) العمليات على المجموعات

هناك أربع عمليات أساسية تستخدم في حل المسائل المتعلقة بالمجموعات:

1. عملية الاتحاد.
2. عملية التقاطع.
3. عملية الفرق.
4. المُتمِّمة.

و فيما يأتي سنذكر كلاّ من العمليات السابقة بالتفصيل

1- عملية الاتحاد.

يعرف اتحاد مجموعتين A و B على أنه المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر التي تنتمي الى المجموعة A او المجموعة B (او كليهما معا).

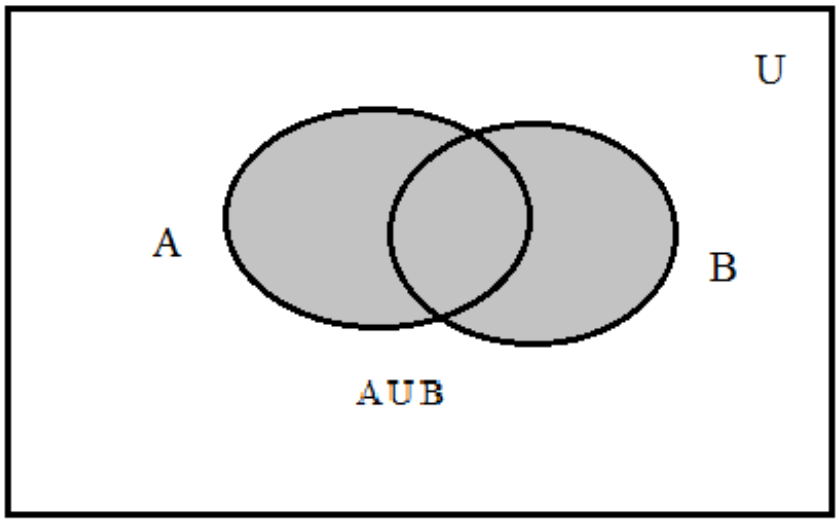
يرمز للاتحاد بين المجموعتين A و B بالرمز $A\cup B$. و يمكن التعبير عن اتحاد مجموعتين بالمجموعة الآتية:

$$A\cup B = \{x \in U: x \in A \text{ أو } x \in B\}.$$

و الجزء المظلل في شكل (1–2) يمثل اتحاد مجموعتين A و B

و من هذا التعريف نستنتج أن:

1. $A\cup B = B\cup A$, أي أن عملية الاتحاد إبدالية.
2. $A\subseteq A\cup B$ و $B\subseteq A\cup B$.
3. $A\cup A = A$.
4. $A\cup\phi = A$, أي أن ϕ عنصر محايد لعملية الاتحاد.
5. $A\cup U = U$.
6. $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$, أي أن عملية الاتحاد تجميعية.



شكل (1–2): تمثيل اتحاد مجموعتين باستخدام أشكال ڤن

مثال(14):

$$\{a,b\}\cup\{c,d\}=\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b\}\cup\{a,c\}=\{a,b,c\}$$

$$\{a,b\}\cup\phi=\{a,b\}$$

$$\{a,b\}\cup\{\{a,b\}\}=\{a,b,\{a,b\}\}$$

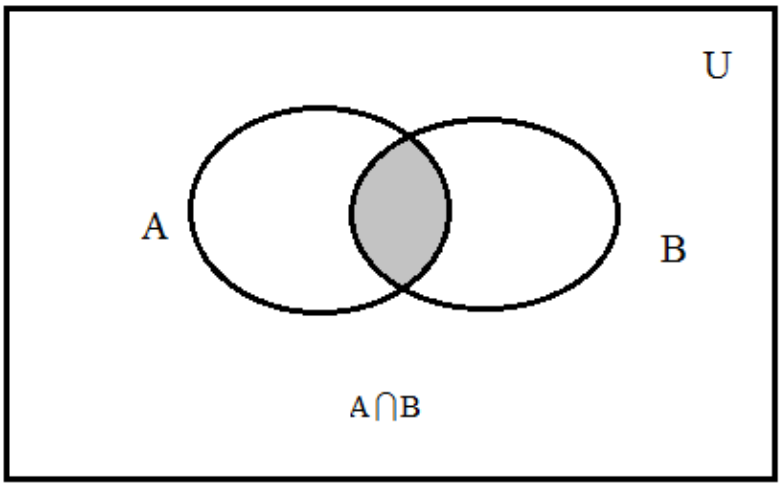
2 . عملية التقاطع

يعرف تقاطع المجموعتين A و B على أنه المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر المشتركة في كل من المجموعتين A و B معا .

يرمز للتقاطع بين المجموعتين A و B بالرمز $A\cap B$. و يمكن التعبير عن تقاطع مجموعتين بالمجموعة الآتية:

$$A\cap B = \{x \in U: x \in A \text{ و } x \in B\}$$

و الجزء المظلل في شكل(1-3) يمثل تقاطع مجموعتين A و B



شكل (1-3): تمثيل تقاطع مجموعتين باستخدام أشكال ڤن

و من هذا التعريف نستنتج أن:

1. $A\cap B=B\cap A$, أي أن عملية التقاطع إبدالية.
2. $A\cap B\subseteq B$ و $A\cap B\subseteq A$.
3. $A\cap A=A$.
4. $A\cap\phi=\phi$.
5. $A\cap U=A$, أي أن U عنصر محايد لعملية التقاطع.
6. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$, أي أن عملية التقاطع تجميعية .
7. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, أي أن عملية التقاطع تتوزع على عملية الاتحاد .
8. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, أي أن عملية الاتحاد تتوزع على عملية التقاطع .

ملاحظة (5): إذا كانت A و B مجموعتين منفصلتين فإن $A\cap B=\phi$

مثال(15): انظر تقاطع المجموعات التالية:

$$\{a,b\}\cap\{a,c\}=\{a\}$$

$$\{a,b\}\cap\{d,e\}=\phi$$

$$\{a,b\}\cap\phi=\phi$$

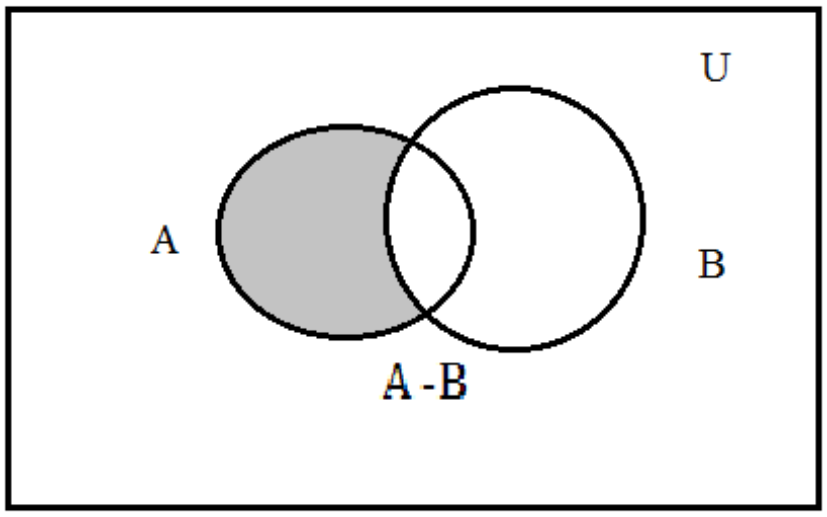
3 . عملية الفرق بين مجموعتين

فرق مجموعتين A و B هي المجموعة التي تحتوي عناصر المجموعة A التي تكون غير موجودة في المجموعة B و يرمز للفرق بين مجموعتين A و B بالرمز $A-B$ (و أحيانا يرمز له بالرمز $A\backslash B$ أي A عدا B).

و يمكن التعبير عن الفرق بين مجموعتين بالمجموعة الآتية:

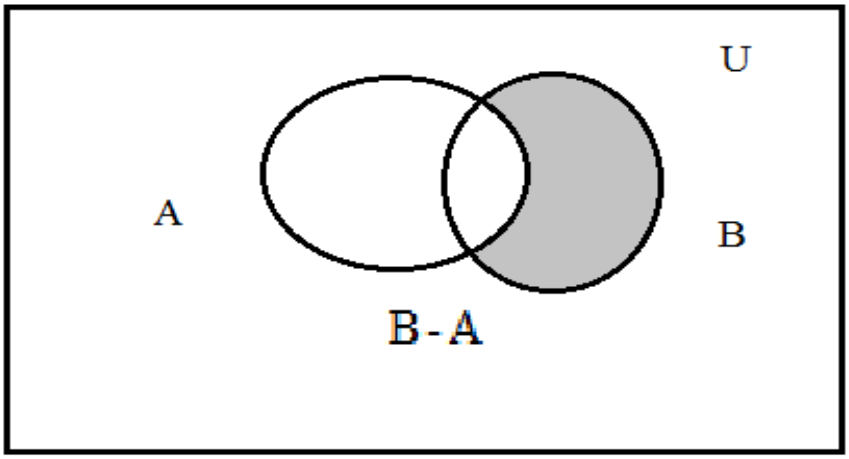
$$A-B=\{x\in U : x\in A \text{ و } x\notin B\}\ .$$

يرمز لفرق المجموعتين A بدون عناصر B بالرمز ($A-B$) كما في الجزء المظلل من شكل (1-4) .



شكل (1-4): تمثيل الفرق بين مجموعتين(A-B) باستخدام أشكال ڤن

كما يرمز لفرق المجموعتين B بدون عناصر A بالرمز $(B-A)$ كما في الجزء المظلل من شكل(1-5)



شكل (1-5): تمثيل الفرق بين مجموعتين (B – A) باستخدام أشكال ڤن

و من هذا التعريف نستنتج أن:

1. $A-B \neq B-A$, أي أن عملية الفرق ليست إبدالية.
2. $A-B \subseteq A$.
3. $A-A=\phi$.
4. $A-\phi=A$.

ملاحظة (6): المجموعات $B\text{-}A$, $A\text{-}B$, $A\cap B$ منفصلة مثنى, أي أن تقاطع أي مجموعتين منها يساوي ϕ.

مثال(16):

$$\{a,b,c\}-\{a\}=\{b,c\}$$

$$\{a,b,c\}-\{a,d\}=\{b,c\}$$

$$\{a,b,c\}-\{d,e\}=\{a,b,c\}$$

مثال(17): اذا كانت

$$A=\{a,b,c,d\},B=\{c,d,e,f\}$$

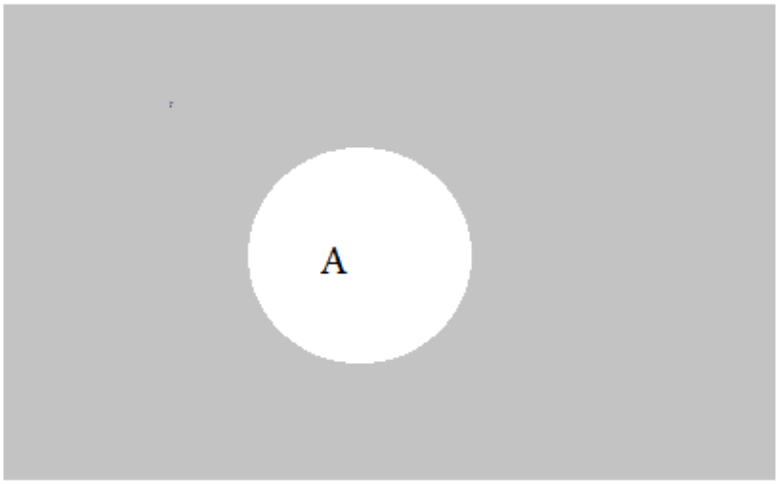
فأوجد كلاّ من $A-B$ و $A-(A\cap B)$.

الحل:

$$A-B=\{a,\ b\}$$
$$A\cap B=\{c,d\},\quad A-(A\cap B)=\{a,\ b\}$$

4-متممة أو مكملة المجموعة

متممة أو مكملة المجموعة A هي مجموعة يرمز لها بالرمز A^c أو $\overline{A}$ و هي المجموعة المكونة من جميع العناصر التي لا تنتمي إلى A . و يمكن التعبير عن متممة أو مكملة المجموعة A بالمجموعة الآتية: $A^c=\{x:x\in U,x\notin A\}$ و الجزء المظلل في شكل (1-6) يمثل A^c.



شكل (1-6): تمثيل متممة (مكملة) مجموعة باستخدام أشكال ڤن

و من هذا التعريف نستنتج أن:

1. $U - A = A^c$.
2. $A \cap A^c = \phi$, أي أن المجموعتان A و A^c منفصلتان .
3. $A \cup A^c = U$.
4. $\phi^c = U - \phi = U$.
5. $U^c = U - U = \phi$

نتائج: من أهم خصائص العمليات على المجموعات ما يلي:

1. $(A^C)^C = A$
2. $U^C = \varphi$
3. $\varphi^C = U$
4. $A^C = U - A$
5. $A \cap A = A$
6. $A \cup A = A$
7. $A \cap U = A$
8. $A \cup U = U$
9. $A \cap \varphi = \varphi$
10. $A \cup \varphi = A$
11. $A - B = A \cap B^C$
12. إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $A \cap B = A$
13. إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $A \cup B = B$

مثال(18): يراد شراء ثلاثة أنواع من اللحوم من جزار معين، فإذا رمزنا للحم الدجاج بـ A ولحم الضأن بـ B ، ولحم العجل بـ C فإن :

- توفر أنواع اللحوم الثلاثة يعني توفر لحم A و B و C أي بمعنى :

$$A \cap B \cap C$$

- عدم توفر أي نوع من اللحوم يعني عدم توفر A و B و C أو كلها أي بمعنى

$$A^c \cap B^c \cap C^c$$

- توفر نوع واحد من اللحوم على الأقل هو توفر A أو B أو C أو كلها أي بمعنى :

$$A \cup B \cup C$$

- توفر نوع A فقط يعني : $A \cap B^c \cap C^c$

- توفر نوع واحد من اللحم يعني إما توفر A وعدم توفر النوعين الآخرين أو توفر B وعدم توفر النوعين الآخرين ، أو توفر C وعدم توفر النوعين الآخرين أي بمعنى

$$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

(1-6) قوانين دي مورجان

لأى حدثين B و A تتحقق العلاقتان التاليتان واللتان يطلق عليهما اسم قوانين دي مورجان:

1. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
2. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

ملاحظة (7): من (1) نلاحظ أن مكملة الاتحاد لأى مجموعتين تساوى تقاطع مكملتي المجموعتين و من (2) نلاحظ أن مكملة التقاطع لأى مجموعتين تساوى اتحاد مكملتي المجموعتين و تعمم قوانين دى مورجان لأى عدد منته من المجموعات

مثال(19): اذا كانت $U=\{1, 2, 3,\ldots,9\}$, $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$

اوجد كلا من : $A^c, B^c, A^c \cup B^c, A^c \cap B^c, (A \cup B)^c, (A \cap B)^c$

الحل:

$$A^c = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B^c = \{1, 4, 6, 8, 9\}$$

$$A^c \cup B^c = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$$

$$A^c \cap B^c = \{4, 6, 8\}$$

$$(A \cup B)^c = \{4, 6, 8\}$$

$$(A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$$

تمارين على الوحدة الأولى

1. اكتب كلا من المجموعات الآتية بذكر عناصرها و باستخدام الصفة المميزة لها:
   i. مجموعة الأرقام المكونة للعدد 40520.
   ii. مجموعة العوامل الموجبة للعدد 24.
   iii. مجموعة الأعداد الطبيعية الأولية الأصغر من 20.
   iv. مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية الأقل من أو تساوي 100.
   v. مجموعة حروف كلمة mathematics.

2. لتكن $A=\{2,\{3\},\{4,5\}\}$. ما قيمة الصواب لكل عبارة مما يأتي:

i. $2\in A$	ii. $3\in A$
iii. $4\in A$	iv. $\{3\}\in A$
v. $\{4\}\subseteq A$	vi. $\{3\}\subseteq A$
vii. $\{4,5\}\subseteq A$	viii. $\{2,3\}\subseteq A$
ix. $\phi\in A$	x. $\{2,3,4,5\}=A$

3. لتكن $U=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ و $A=\{a, c, d, h\}$ و $B=\{b, c, d, f\}$
   a. عبر عن كل مجموعة من المجموعات الآتية و أذكر عناصرها
   1) مجموعة العناصر التي لا تنتمي إلى A .
   2) مجموعة العناصر التي لا تنتمي إلى B .
   3) C = مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B .
   4) D = مجموعة العناصر التي تنتمي إلى B و لا تنتمي إلى A .
   5) I= مجموعة العناصر المشتركة بين A و B .

b. أرسم شكل فن الذي يمثل المجموعات U, A, B, C, D, I .

4. أكتب مجموعة القوة للمجموعة $A=\{ a, b, c, d \}$.

5. لتكن $U=\{1, 2, 3, 4, 5 \}$, $A=\{ 1, 2,4 \}$, $B=\{ 2, 4, 5 \}$, $C=\{ 2, 3, 5\}$
اكتب كلا من المجموعات الآتية بذكر عناصرها, ثم أوجد رتبة كل منها:

i. $A\cup B$ ii. $A\cup C$

iii. $B-C$ iv. $A\cap B$

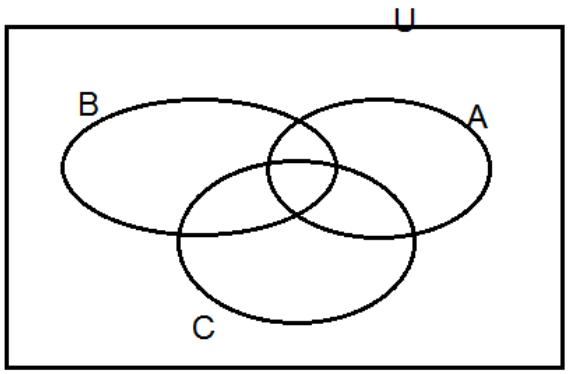
v. $B\cup C^C$ vi. $A-C^C$

vii. $(B\cap C)^C$ viii. $A\cap(B\cup C)$

ix. $(A\cup B)-C$ x. $A\cup(B-C)$

xi. $(A\cap B)-C$ xii. $(A-C)^C$

6. في شكل فن الآتي، ظلل المنطقة التي تمثل كلا مما يأتي:



i. $A\cap(B\cup C)$ ii. $(A\cap B)\cup C^C$

iii. $A-(B\cup C)$ iv. $A\cap(B-C)$

7. ميز العبارات الآتية صوابا أم خطأ:

i. $A\subseteq A\cup B$ ii. $A\subseteq A\cap B$

iii. $(B^C)^C=B$ iv. $(A\cap B)\cup A=A$

v. $(A\cup B)\cap A=A$ vi. $B\cap B^C=\phi$

vii. $A\cap A=A$ viii. $\phi^C\subset U$

8. استخدم أشكال فن لتوضيح صحة كل من المتطابقات الآتية:

i. $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

ii. $A^C-B^C=B-A$

iii. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

9. اذا كانت $U=\{1,2,3,\ldots,9\}$, $A=\{1,2,5\}$, $B=\{2,7\}$, $C=\{5,6,9\}$

اوجد كل مما يلي:

1. $A\cup B$ 2. $A\cap B$ 3. $A-B$
4. $\overline{A}$ 5. $C-A$ 6. $(A-B)\cup C$
7. $A\cap\overline{A}$ 8. $A\cup\overline{A}$ 9. $(A\cap B)\cup C$

الوحدة الثانية

مجموعات الأعداد و العمليات عليها

(2–1) مجموعات الأعداد

(2–2) العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية

(2–3) العمليات الحسابية على الأعداد النسبية

(2–4) تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد

(2–5) الفترات

(2–6) الأعداد المركبة

(2–7) العمليات على الأعداد المركبة

سندرس في هذه الوحدة أهم مجموعات الأعداد الطبيعية، الصحيحة، النسبية و الحقيقية. كما أن العمليات الحسابية الأربعة (الجمع–الطرح– الضرب– القسمة) سيتم عرضها و دراسة أهم خصائصها و سنستعرض كيفية تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد. ثم ندرس فترات الأعداد الحقيقية و أنواعها مع توضيح بعض العمليات عليها من خلال الرسم. و في نهاية الوحدة ندرس الأعداد المركبة والعمليات عليها.

(2–1) مجموعات الأعداد

تصنف مجموعات الأعداد إلى المجموعات التالية:

1- **مجموعة الأعداد الطبيعية (مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة):** هي مجموعة يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{N}^*$ و تكتب على الصورة

$$\boldsymbol{N}^* = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

2- **مجموعة الأعداد الكلية (مجموعة الأعداد الصحيحة غير سالبة):** و تتكون من مجموعة الأعداد الطبيعية مضافا إليها الصفر و يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{N}$ حيث

$$\boldsymbol{N} = \{ 0,1, 2, 3, 4, \dots \}$$

3- **مجموعة الأعداد الصحيحة:** هي مجموعة يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{Z}$ و تكتب على الصورة

$$\boldsymbol{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

4- **مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة:** و يرمز لها بالرمز $\mathbf{Z}^-$

$$Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

5- **مجموعة الأعداد الصحيحة غير موجبة:** و هي تتكون من مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة مضافا إليها الصفر و يرمز لها بالرمز $\mathbf{Z}^- \cup \{0\}$.

$$Z^- \cup \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

6- **مجموعة الأعداد الفردية:** و تكتب على الصورة

$$\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

7- **مجموعة الأعداد الزوجية:** و تكتب على الصورة

$$\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

ملاحظة (1): مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الكلية و مجموعة الأعداد الكلية مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة.

$$N^* \subset N \subset Z$$

8- **مجموعة الأعداد النسبية:**

هي مجموعة يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{Q}$ و تحتوي على الأعداد التي تكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث إن a و b عددين صحيحين و $b \neq 0$.

$$Q = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in Z, \ b \neq 0\right\}.$$

مثال(1): كل من الأعداد التالية أعداد نسبية

$$\frac{2}{3}, \quad -\frac{25}{18}, \quad \frac{1}{8}$$

ملاحظة (2): كل عدد صحيح هو عدد نسبي لأنه يكتب على صورة عدد نسبي مقامه يساوي الواحد صحيح. لذلك فإن مجموعة الأعداد الصحيحة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية.

$$\boldsymbol{Z \subset Q}$$

ولكن العكس غير صحيح فالأعداد النسبية التي بسطها لا يقسم على مقامها ليست أعداداً صحيحة.

مثال(2):

1. كل من الأعداد التالية أعداد صحيحة و نسبية

$$3 = \frac{3}{1}, \quad -4 = \frac{-4}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}$$

2. كل من الأعداد التالية أعداد نسبية و لكن ليست صحيحة

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{-15}{7}, \quad \frac{10}{7}$$

9- **مجموعة الأعداد غير النسبية (الصماء):** هي مجموعة يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{Q^c}$ و تحتوي على الأعداد التي لا تكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث أن a و b عددين صحيحين و $b \neq 0$.

مثال(3): كل من الأعداد التالية أعداد غير نسبية

$$\sqrt{2}\,,\quad \sqrt{3},\ \sqrt{7}\,,\quad \pi$$

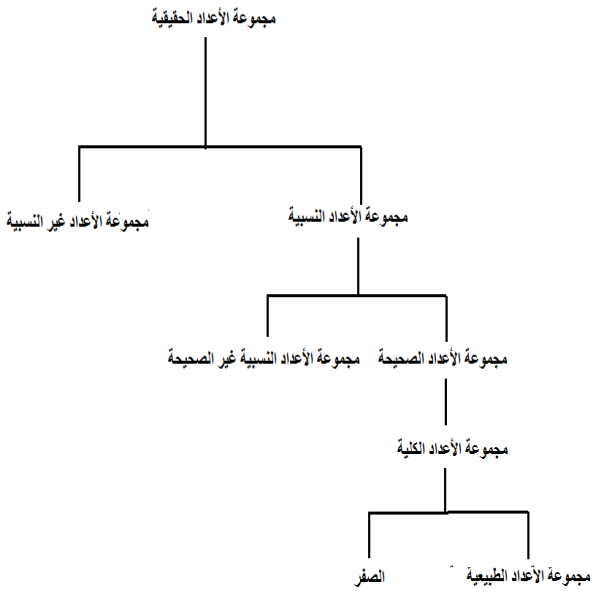
10- **مجموعة الأعداد الحقيقية:** هي مجموعة يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{R}$ و تحتوي على الأعداد النسبية و غير النسبية.

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{Q^c}$$

ملاحظة (3): نلاحظ مما سبق أن العلاقة بين مجموعات الأعداد هي كالتالي

$$\boldsymbol{N^*} \subset \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$$

شكل (2−1) يوضح أنواع المجموعات المختلفة و العلاقة بين هذه المجموعات.



شكل (2−1): مجموعات الأعداد

(2-2) العمليات الحسابية على الاعداد الحقيقية

العمليات الحسابية الأربعة على الاعداد الحقيقية هي (الجمع – الطرح – الضرب – القسمة) و فيما يلي سندرس هذه العمليات و نوضح أهم خصائصها.

- **عملية الجمع**

عملية جمع الأعداد الحقيقية يرمز لها بالرمز (+) و هي تمتاز بالخصائص التالية:

1. **عملية الجمع مغلقة**

عند جمع عددين حقيقيين فإن ناتج الجمع يكون عدداً حقيقياً.

إذا كان $x, y \in \boldsymbol{R}$ و $z = x + y$ فإن $z \in \boldsymbol{R}$.

2. **عملية الجمع إبدالية**

عند جمع الأعداد الحقيقية فإن ترتيب الأعداد غير مهم لأن ناتج الجمع لا يتغير.

إذا كان $x, y \in \boldsymbol{R}$ فإن $x + y = y + x$.

3. **المحايد الجمعي**

عند جمع عدد حقيقي مع الصفر فإن ناتج الجمع يكون العدد الذى جمع مع الصفر فلذلك يسمى الصفر بالمحايد الجمعي.

إذا كان $x \in \boldsymbol{R}$ فإن $x + 0 = x = 0 + x$.

4. **المعكوس (النظير) الجمعي**

لكل عدد حقيقي يوجد عدد حقيقي أخر يسمي معكوسه (نظيره) الجمعي بحيث أن ناتج جمعهما يساوي المحايد الجمعي (الصفر).

إذا كان $x \in \boldsymbol{R}$ فإن $-x \in \boldsymbol{R}$ و $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

5. عملية الجمع دامجة (تجميعية)

عند اجراء عملية الجمع على ثلاثة أعداد حقيقية فإن جمع أول عددين و جمع النتيجة مع العدد الثالث يعطى نفس نتيجة جمع العدد الاول مع ناتج جمع العددين الثاني و الثالث.

إذا كان $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ فإن

$$x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z).$$

مثال(4):

$$5 + 8 = 8 + 5 = 13$$

$$\pi + 0 = 0 + \pi = \pi$$

$$3 + (-3) = (-3) + 3 = 0$$

$$4 + 7 + 9 = (4 + 7) + 9 = 4 + (7 + 9) = 20$$

- **عملية الطرح**

عملية طرح الأعداد الحقيقية يرمز لها بالرمز $(-)$ و عملية الطرح مغلقة على الاعداد الحقيقية لأنه إذا كان $x, y \in \boldsymbol{R}$ و $z = x - y$ فإن $z \in \boldsymbol{R}$.

ملاحظة (4): عملية الطرح لا تتميز ببعض خصائص عملية الجمع و منها:

1. عملية الطرح ليست ابدالية.

إذا كان $x, y \in \boldsymbol{R}$ فإن $x - y \neq y - x$.

2. عملية الطرح ليست دامجة (تجميعية).

إذا كان $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ فإن

$$(x - y) - z \neq x - (y - z)$$

مثال(5):

$$8 - 5 = 3 \neq -3 = 5 - 8$$
$$(10 - 8) - 3 = 2 - 3 = -1$$
$$10 - (8 - 3) = 10 - 5 = 5$$

- **عملية الضرب**

عملية ضرب الأعداد الحقيقية يرمز لها بالرمز $(\cdot)$ و هي تمتاز بالخصائص التالية:

1. عملية الضرب مغلقة

عند ضرب عددين حقيقيين فإن ناتج الضرب عدد حقيقي.

إذا كان $x, y \in \boldsymbol{R}$ و $z = x \cdot y$ فإن $z \in \boldsymbol{R}$.

2. عملية الضرب إبدالية

عند ضرب الأعداد الحقيقية فإن ترتيب الأعداد غير مهم لأن ناتج الضرب لا يتغير.

إذا كان $x, y \in \boldsymbol{R}$ فإن $x \cdot y = y \cdot x$.

3. المحايد الضربي

عند ضرب عدد حقيقي مع الواحد فإن ناتج الضرب يكون العدد الذى ضرب مع الواحد فلذلك يسمى الواحد بالمحايد الضربي.

إذا كان $x \in \boldsymbol{R}$ فإن $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.

4. المعكوس (النظير) الضربي

لكل عدد حقيقي عدا الصفر يوجد عدد حقيقي أخر يسمي معكوسه (نظيره) الضربي بحيث أن ناتج ضربهما يساوي المحايد الضربي (الواحد).

إذا كان $x \in \boldsymbol{R},\ x \neq 0$ فإن $\frac{1}{x} \in \boldsymbol{R}$ و $x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} \cdot x$.

5. عملية الضرب دامجة (تجميعية)

إذا كان $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ فإن

$$x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

- **قاعدة الاشارات**

عند ضرب عددين حقيقيين فإن اشارة ناتج عملية الضرب يتبع القاعدة التالية:

$$\begin{aligned} (+) \cdot (+) &= (+) \\ (-) \cdot (-) &= (+) \\ (+) \cdot (-) &= (-) \end{aligned}$$

- **توزيع عملية الضرب على عمليتي الجمع و الطرح**

إذا كان $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ فإن

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$
$$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$$

- **عملية القسمة**

عملية قسمة الأعداد الحقيقية يرمز لها بالرمز $(\div)$.

إذا كان $x, y \in \boldsymbol{R},\ y \neq 0$ فإن عملية قسمة x على y تكتب كالتالي

$$x \div y = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}.$$

x يسمى المقسوم و y يسمى المقسوم عليه.

ملاحظة (5):

1. القسمة على صفر لا تجوز.
2. عملية القسمة هي عملية ضرب بالمعكوس الضربي.
3. عملية القسمة تخضع لنفس قاعدة الاشارات في حالة الضرب مع ابدال عملية الضرب بالقسمة.

تعريف (1): العدد الأولى هو عدد طبيعي أكبر من واحد و لا يقبل القسمة إلا على نفسه و على الواحد الصحيح.

فالأعداد التالية $\{2,\ 3, 7, 11, 13, \ldots\}$ أعداد أولية.

ملاحظة (6):

1. العدد الزوجي و الأولي الوحيد هو العدد **2**.
2. كل عدد أولي أكبر من **2** هو عدد فردي و لكن العكس غير صحيح، فمثلا **15** عدد فردي و لكنه ليس عدد أولياّ لأنه يقسم علي **3** و **5**.

(2-3) العمليات الحسابية على الأعداد النسبية

بعد أن استعرضنا العمليات الحسابية المختلفة على مجموعة الاعداد الحقيقية فإننا سوف ندرس كيفية اجراء هذه العمليات على مجموعة الأعداد النسبية و التي تتضمن بدورها كل من مجموعتي الأعداد الطبيعية و الأعداد الصحيحة.

مما سبق نعلم أن العدد النسبي يكتب على الصورة الكسرية $\frac{a}{b}$ حيث إن a و b عددين صحيحين و $b \neq 0$ و يسمى a بسط العدد النسبي و b مقامه.

تعريف (2): العددان النسبيان اللذان مقامهما متساويان يسميان عددان نسبيان متجانسان.

مثال(6): الأعداد النسبية التالية متجانسة:

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{-1}{4}, \quad \frac{10}{4}, \quad \frac{24}{4}$$

الأعداد النسبية التالية غير متجانسة:

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{-1}{6}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{27}{22}$$

ملاحظة (7): الأعداد الصحيحة هي أعداد نسبية متجانسة لان جميعها لها نفس المقام و هو الواحد الصحيح.

- **المقارنة بين الاعداد النسبية**

تعريف (3):

1. العددان النسبيان $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ متساويان إذا و فقط إذا تحقق الشرط التالي $ad = bc$.
2. العدد النسبي $\frac{a}{b}$ أكبر من العدد النسبي $\frac{c}{d}$ إذا و فقط إذا تحقق التالي $ad > bc$.

ملاحظة (8):

1. الأعداد النسبية التالية متساوية:

$$\frac{15}{20}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{30}{40}, \quad \frac{18}{24}$$

2. الأعداد النسبية التالية غير متساوية:

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{-2}{3}$$

3. العدد النسبي $\frac{3}{4}$ أكبر من العدد النسبي $\frac{25}{36}$.

ملاحظة (9): العدد النسبي يمكن كتابته بصور عديدة كلها متساوية و ذلك بضرب كل من بسطه و مقامه بنفس العدد الصحيح.

مثال(7): الأعداد النسبية التالية كلها متساوية و نحصل عليها بضرب كل من بسط و مقام العدد النسبي $\frac{1}{2}$ بالأعداد الصحيحة التالية على التوالي $17\ -8, -1, 3, 5$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} = \frac{-8}{-16} = \frac{17}{34}$$

- **جمع و طرح الأعداد النسبية**

عند جمع و طرح الأعداد النسبية توجد حالتان هما:

1. جمع و طرح الأعداد النسبية المتجانسة

عند جمع عددين نسبيين متجانسين فإن الناتج يكون عدد نسبي له نفس المقام و بسطه يكون ناتج جمع بسطي العددين.

عند طرح عددين نسبيين متجانسين فإن الناتج يكون عدد نسبي له نفس المقام و بسطه يكون ناتج طرح بسطي العددين.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

مثال(8) :

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = \frac{-2}{4}$$

2. جمع و طرح الأعداد النسبية غير المتجانسة

إذا أردنا جمع أو طرح عددين نسبيين غير متجانسين فإننا في البداية نحولهما إلى عددين متجانسين و ذلك عن طريق ضرب بسط و مقام كل منهما بمقام العدد الأخر ثم نجرى عملية الجمع أو الطرح على العددين النسبيين المتجانسين الناتجين.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

مثال(9) :

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{3} = \frac{15}{12} + \frac{4}{12} = \frac{19}{12}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{20}$$

- **ضرب الأعداد النسبية**

عند ضرب عددين نسبيين فإن الناتج عدد نسبي بسطه حاصل ضرب بسطي العددين و مقامه حاصل ضرب مقامي العددين.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

ملاحظة (10):

1. عند ضرب عدد صحيح بعدد نسبي فإن الناتج يكون عدد نسبي مقامه يساوى مقام العدد النسبي المضروب و بسطه ينتج من ضرب العدد الصحيح ببسط العدد النسبي.

$$a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d}$$

2. كل عدد نسبي لا يساوي الصفر له معكوس ضربي نحصل عليه بإيجاد مقلوبه بجعل البسط مقام و المقام بسط.

المعكوس الضربي للعدد النسبي $\frac{a}{b}$ هو $\frac{b}{a}$ حيث $a \neq 0$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

مثال(10) :

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{12}$$

$$-2 \cdot \frac{7}{9} = \frac{-14}{9}$$

- **قسمة الأعداد النسبية**

عند قسمة عدد نسبي على عدد نسبي أخر لا يساوي الصفر فإننا نضرب العدد الأول بمقلوب العدد الثاني.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

مثال(11) :

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{21}{10}$$

مثال(12) :

1. $\frac{15}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{30}{21}$
2. $\frac{4}{9} \cdot \frac{-3}{5} = \frac{-12}{45}$
3. $4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$

4. $\frac{-4}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-4}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{-20}{6}$
5. $\frac{1}{7} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{21}$
6. $\frac{4}{9} \div 2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{18}$

تعريف (4): العدد الكسرى هو عدد يتكون من عدد صحيح و كسر ويكتب على الصورة $a\frac{b}{c}$ و يسمى a الجزء الصحيح من العدد الكسري و $\frac{b}{c}$ الجزء الكسري من العدد الكسري.

مثال(13) : الأعداد التالية أعداد كسرية

$$2\frac{3}{5}, \qquad -5\frac{7}{8}, \qquad 11\frac{4}{7}, \qquad -12\frac{5}{6}$$

ملاحظة (11):

1. العدد النسبي الذي بسطه أصغر من مقامه هو عدد كسري الجزء الصحيح منه يساوي الصفر.

2. العدد النسبي الذي بسطه أكبر من مقامه يمكن تحويله لعدد كسري بقسمة البسط على المقام و يكون ناتج القسمة هو العدد الصحيح و باقي القسمة يكون بسط الكسر و المقام يبقي نفس المقام للعدد النسبي.

3. ينتج مما سبق أن كل عدد نسبي هو عدد كسري.

4. يمكن تحويل العدد الكسري لعدد نسبي بضرب العدد الصحيح في العدد الكسري بالمقام و جمعه مع البسط فيكون الناتج بسط العدد النسبي و المقام للعدد النسبي هو نفس مقام العدد الكسري.

مثال(14) : حول الأعداد الكسرية التالية إلى أعداد نسبية

$$2\frac{3}{5}, \qquad -5\frac{7}{8}, \qquad 11\frac{4}{7}, \qquad -12\frac{5}{6}$$

الحل:

1. $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$
2. $-5\frac{7}{8} = -\frac{47}{8}$
3. $11\frac{4}{7} = \frac{81}{7}$
4. $-12\frac{5}{6} = -\frac{77}{6}$

مثال(15) : حول الأعداد النسبية التالية إلى أعداد كسرية

$$\frac{22}{5}, \qquad \frac{17}{8}, \qquad \frac{-30}{7}, \qquad \frac{95}{11}$$

الحل:

1. $\frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$
2. $\frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$
3. $\frac{-30}{7} = -4\frac{2}{7}$
4. $\frac{95}{11} = 8\frac{7}{11}$

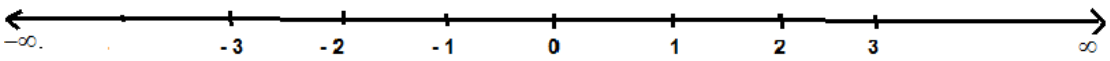
ملاحظة (12):

عند اجراء العمليات الحسابية على الأعداد الكسرية فإننا نحولها في البداية إلى أعداد نسبية و نجرى العمليات الحسابية على الأعداد النسبية الناتجة.

(2-4) تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد

- **خط الاعداد**

هو خط مستقيم أفقي ليس له بداية وليس له نهاية (يمتد من $-\infty$ إلى ∞) يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية. و يتم تقسيم خط الأعداد إلى أقسام متساوية الطول طول كل منها وحدة واحدة ويتم ترقيمها باستخدام الأعداد الصحيحة و تكون الأعداد الصحيحة الموجبة على يمين الصفر و الأعداد الصحيحة السالبة على يسار الصفر.

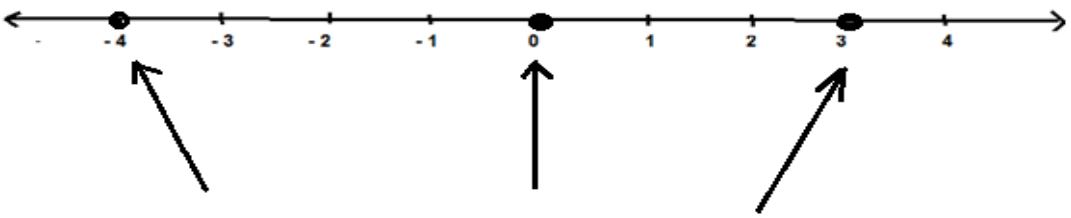


شكل (2-2): خط الأعداد

- يتم تمثيل العدد الصحيح على خط الأعداد بوضع نقطة على قيمة هذا العدد الصحيح.

- كلما كان العدد الصحيح كبير فإن تمثيله يتجه أكثر لليمين و العكس صحيح.

مثال(16): شكل(2-3) يمثل الأعداد الصحيحة $-4, 0, 3$ على خط الأعداد



شكل (2-3): تمثيل الأعداد الصحيحة على خط الأعداد

- **تمثيل الأعداد النسبية على خط الأعداد**

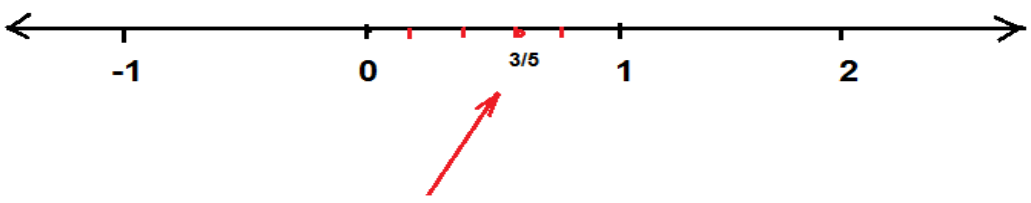
- إذا كان العدد النسبي عدد صحيح فإنه يمثل على خط الأعداد مثل الأعداد الصحيحة.

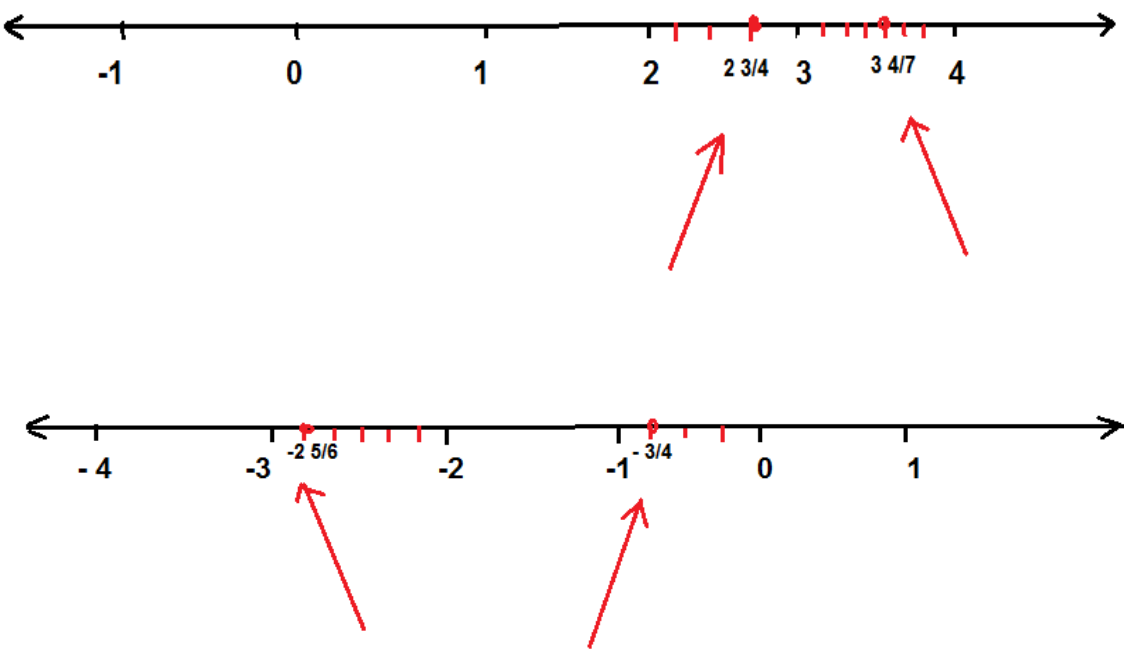
- إذا كان العدد النسبي كسرى و مقامه لا يساوي الواحد فيتم حصره أولا بين عددين صحيحين على خط الأعداد ثم نقسم المسافة بين هذين إلى أجزاء متساوية بين العددين بعدد مقام الكسر العادي ثم نضع نقطة على الجزء بعدد البسط فتكون النقطة ممثلة للعدد النسبي على خط الأعداد.

مثال(17): مثل الأعداد النسبية التالية على خط الأعداد.

$$\frac{3}{5}, \qquad 2\frac{3}{4}, \qquad 3\frac{4}{7}, \qquad -\frac{3}{4}, \qquad -2\frac{5}{6}$$

الحل:





- **تمثيل الأعداد غير النسبية (الصماء) على خط الأعداد**

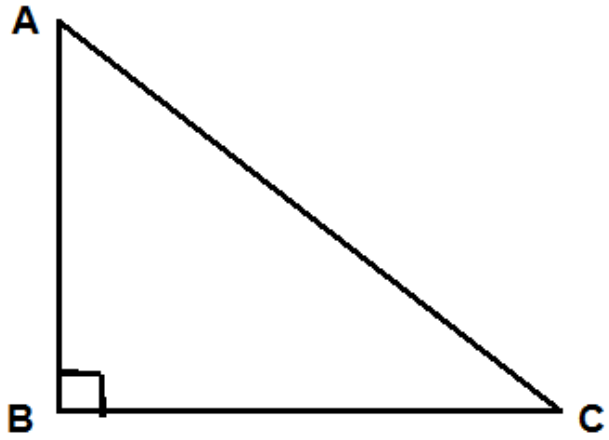
نحتاج لتمثيل الأعداد غير النسبية (الصماء) على خط الأعداد إلى نظرية فيثاغورث.

نظرية (1): (نظرية فيثاغورث)

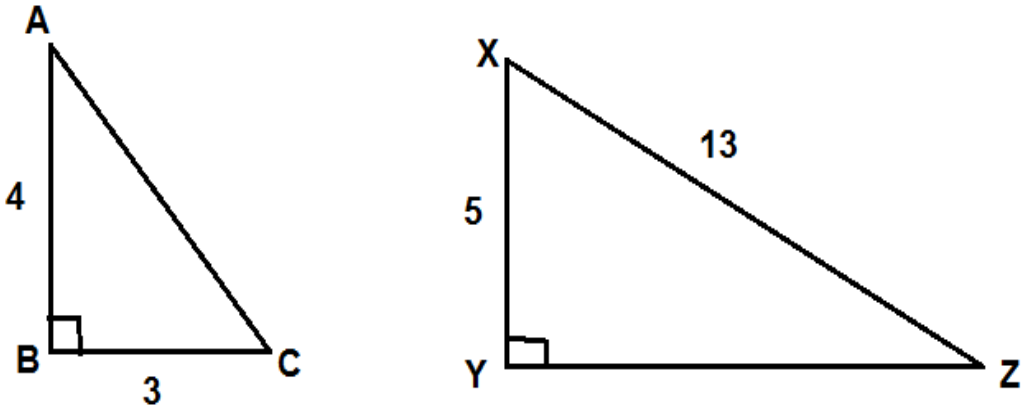
في المثلث قائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة.

في المثلث ABC

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2$$



مثال(18): أوجد طول الضلع المجهول في المثلثات التالية:



الحل:

$$YZ = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

$$AC = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

عند تمثيل الأعداد غير النسبية (الصماء) على خط الأعداد فإنه توجد حالتان

- **الحالة الأولى**

إذا كان مربع العدد غير النسبي يمكن كتابته على صورة مجموع مربعين.

مثال(19): العددان لغير النسبيان $\sqrt{13}$,$\sqrt{2}$ يمكن كتابة مربعهما كالتالي

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 = 1 + 1 = (1)^2 + (1)^2$$

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13 = 9 + 4 = (3)^2 + (2)^2$$

مثال(20) : مثل العدد $\sqrt{13}$ على خط الأعداد.

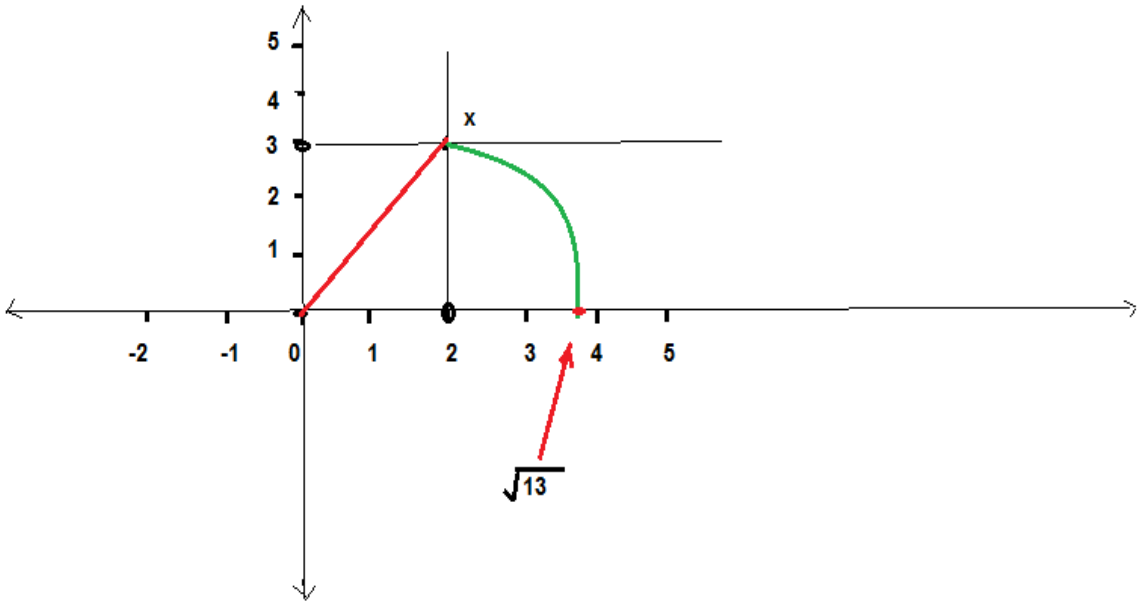
لتمثيل العدد $\sqrt{13}$ على خط الأعداد نقوم بالخطوات التالية:

1. نكتب مربع $\sqrt{13}$ على الصورة

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = (2)^2 + (3)^2$$

2. نمثل العدد 2 على الخط الأفقي و 3 على الخط الرأسي.
3. نرسم خط راسي من النقطة 2 و خط أفقي من النقطة 3 ويتقاطعان في النقطة x.
4. نصل بين نقطة الأصل o و نقطة التقاطع x.
5. نركز الفرجار في نقطة الأصل o و نفتحه فتحة حتى يصل x فيكون طول فتحة الفرجار يساوي طول القطعة المستقيمة ox.
6. نرسم قوس يقطع المحور الأفقي (محور السينات) فتكون نقطة تقاطع القوس مع محور السينات هي نقطة تمثيل العدد $\sqrt{13}$.

الشكل التالي يبين تمثيل العدد $\sqrt{13}$ على خط الأعداد.



- **الحالة الثانية**

إذا كان مربع العدد غير النسبي لا يمكن كتابته على صورة مجموع مربعين.

مثال(21) : الأعداد غير النسبية $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{14}$ لا يمكن كتابة مربعها كمجموع مربعين فنكتبها كالتالي بدلالة أكبر عدد مربع أصغر من مربعها

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 = 4 + 3 = (2)^2 + 3$$

$$\left(\sqrt{14}\right)^2 = 14 = 9 + 5 = (3)^2 + 5$$

مثال(22) : مثل العدد $\sqrt{14}$ على خط الأعداد.

لتمثيل العدد $\sqrt{14}$ على خط الأعداد نقوم بالخطوات التالية:

1. نكتب مربع العدد $\sqrt{14}$ بدلالة أكبر مربع أصغر من مربع $\sqrt{14}$

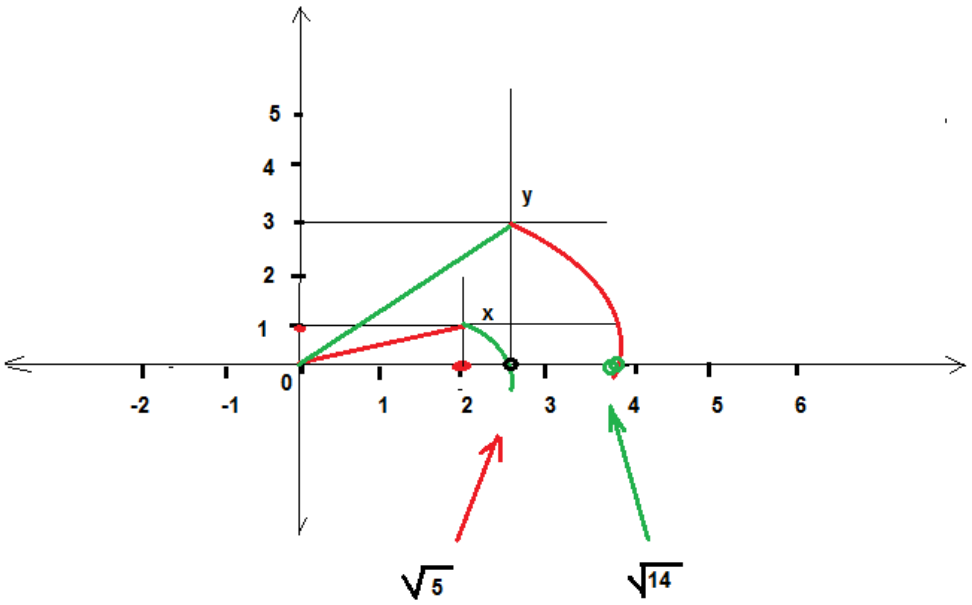
$$\left(\sqrt{14}\right)^2 = 14 = 9 + 5 = (3)^2 + \ 5$$

2. نأخذ العدد الذي ليس بمربع و هو 5 و نكتبه كمجموع مربعين

$$5 = 4 + 1 = (2)^2 + 1$$

3. نستخدم نفس الخطوات السابقة في الحالة الأولى لتمثيل $\sqrt{5}$ على خط الأعداد.
4. نمثل 3 على الخط الراسي.
5. نرسم خط راسي من $\sqrt{5}$ و أفقي من 3 فيتقاطعان في النقطة y.
6. نصل بين نقطة الأصل o و نقطة التقاطع y.
7. نركز الفرجار في نقطة الأصل o و نفتحه فتحة حتى يصل y فيكون طول فتحة الفرجار يساوي طول القطعة المستقيمة oy.
8. نرسم قوس يقطع المحور الأفقي (محور السينات) فتكون نقطة تقاطع القوس مع محور السينات هي نقطة تمثيل العدد $\sqrt{14}$.

الشكل التالي يبين تمثيل العدد $\sqrt{13}$ على خط الأعداد.



(2–5) الفترات

الفترة هي مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

إذا كان $a, b \in \boldsymbol{R}$ فإن

$$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}.$$

$[a, b]$ يرمز للفترة التي تبدأ من العدد a والذي يسمى الحد الأيسر (الأدنى) للفترة و العدد b الذي يسمى الحد الأيمن (الأعلى) للفترة.

تصنف الفترات عدة تصنيفات هي

أ. **فترات محدودة** :- وهي تصنف إلى أحد الأنواع التالية:

1. **فترات مفتوحة**:- وهي الفترات التي لا تحتوي على أي حد من حديها و تكتب علي الصورة (a, b) حيث أن

$$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}.$$

2. **فترات نصف مفتوحة(نصف مغلقة)**:- وهي الفترات التي تحتوي على أحد حديها ولا تحتوي على الحد الأخر و تكتب علي الصورة $[a, b)$ إذا احتوت الحد الأيسر و على الصورة $(a, b]$ إذا احتوت الحد الأيمن حيث أن

$$[a, b) = \{x \in \boldsymbol{R}: a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \boldsymbol{R}: a < x \leq b\}.$$

3. **فترات مغلقة**:- وهي الفترات التي تحتوي على كلا حديها و تكتب علي الصورة $[a, b]$ حيث أن

$$[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R}: a \leq x \leq b\}.$$

ب. **فترات غير محدودة:**- وهي الفترات التي تكتب علي أحد الصور التالية

$$[a,\infty) = \{x \in R: a \le x < \infty\},$$

$$(a,\infty) = \{x \in R: a < x < \infty\},$$

$$(-\infty,b] = \{x \in R: -\infty < x \le b\},$$

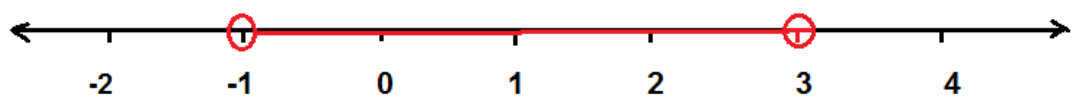
$$(-\infty,b) = \{x \in R: -\infty < x < b\}.$$

ملاحظة (13): مجموعة الأعداد الحقيقية هي فترة غير محدودة و تكتب على الصورة $(-\infty,\infty) = \{x \in R: -\infty < x < \infty\}$ حيث أن $(-\infty,\ \infty)$.

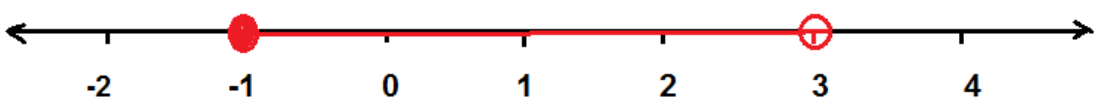
- **تمثيل الفترات على خط الأعداد**

مثال (23): قيما يأتي تمثيل الفترات التالية على خط الأعداد:

1. $(-1,3)$



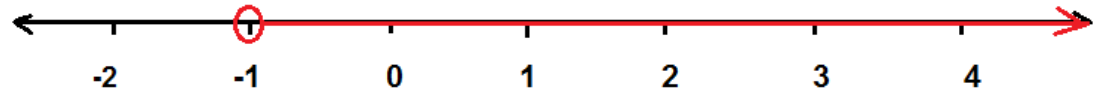
2. $[-1,3)$



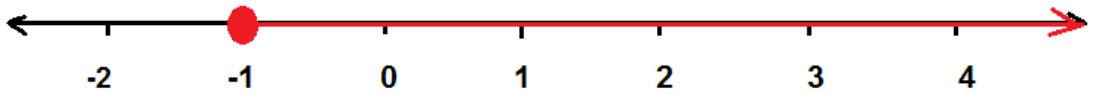
3. $(-1, 3]$

4. $[-1, 3]$

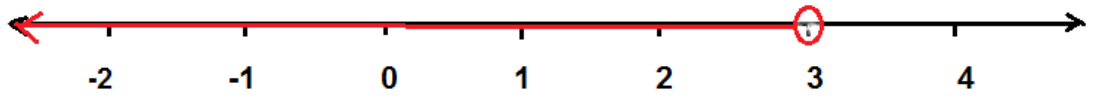
5. $(-1, \infty)$



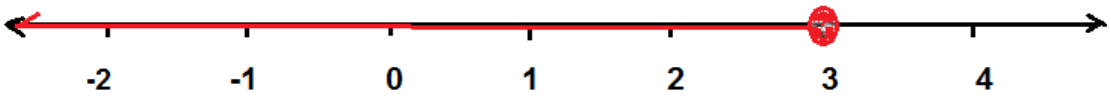
6. $[-1, \infty)$



7. $(-\infty, 3)$



8. $(-\infty, 3]$



(2-6) الأعداد المركبة

سنتعرف الأن على مجموعة جديدة من الأعداد تحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية و هي مجموعة الأعداد المركبة. إن مجموعة الأعداد المركبة تستخدم في حل بعض أنواع المعادلات التي ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية، و هذا ما سنتعرف عليه في الوحدة السادسة من هذا الكتاب. الآن نتناول بعض أهم المفاهيم و المصطلحات المرتبطة بالأعداد المركبة و العمليات الحسابية عليها و أهم خصائصها.

في البداية نتناول موضوع الكميات التخيلية .

تعريف (5): الوحدة التخيلية يرمز لها بالرمز i، حيث أن $i^2 = -1$ و هذا يكافئ $i = \sqrt{-1}$.

تعريف (6): العدد المركب z هو العدد الذي يكتب على الصورة

$$z = x + yi, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

يسمى x الجزء الحقيقي من العدد المركب و y يسمى الجزء التخيلي من العدد المركب.

مثال (24): الأعداد التالية أعداد مركبة

$$2+3i, \quad -1-\sqrt{7}i, \quad 0=0+0i\,, \quad \pi+3i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{5}+0i$$

بعد أن تعرفنا على المقصود بالعدد المركب سنتعرف على المقصود بالعدد المرافق للعدد المركب.

تعريف (7): إذا كان $z=x+yi$ عددا مركبا فإن مرافقه هو عدد مركب يرمز له بالرمز $\bar{z}$ و يكتب على الصورة $\bar{z}=x-yi$. يسمى العددان المركبان z و $\bar{z}$ عددان مترافقان.

فمثلا العدد $2-3i$ هو مرافق العدد $2+3i$ و بالعكس العدد $2+3i$ مرافق العدد $2-3i$ و العددان يسميان عددان مترافقان.

مثال (25): ما يلي مرافق كل من الأعداد المركبة التالية:

a. $\overline{2+3i}=2-3i$

b. $\overline{2-3i}=2+3i$

c. $\overline{4i}=-4i$

d. $\overline{6}=6$

ملاحظة (14): نلاحظ من تعريف المرافق و المثال السابق أن المرافق يحقق ما يلي:

1. لأي عدد مركب z فإن $\overline{\bar{z}}=z$.
2. إذا كان z عدد حقيقي (الجزء التخيلي يساوي 0) فإن $\bar{z}=z$.

تعريف (8): العددان المركبان

$z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$

متساويان إذا وفقط إذا كان $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$.

مثال (25): أوجد قيم $x,\ y$ التي تجعل الأعداد المركبة متساوية في كل فرع

$a.$ $x - 3i$ و $-2 - yi$

$b.$ $x + (2x - y)i$ و $1 + 3i$

الحل:

$a.$ $x = -2$ و $y = 3$

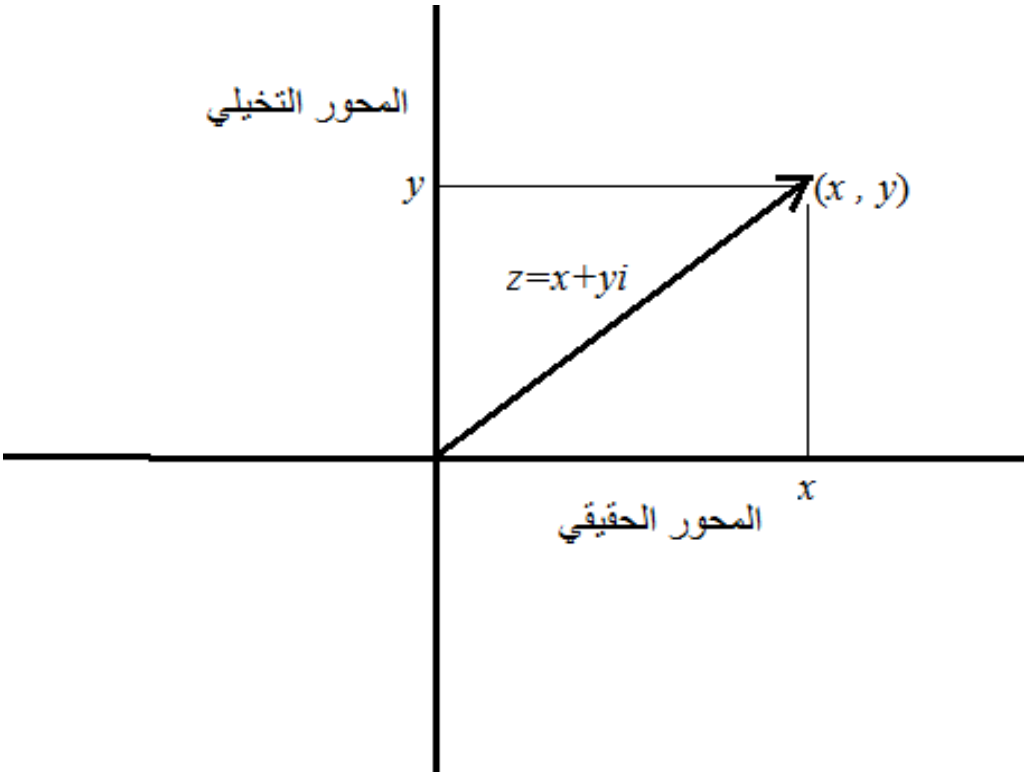
$b.$ $x = 1$ و $y = -1$

- **تمثيل الأعداد المركبة بيانيا**

سنتطرق الآن لكيفية تمثيل الأعداد المركبة بيانيا، حيث يتم تمثيل العدد المركب $z = x + yi$ بالنقطة $(x,\ y)$ في المستوى الديكارتي حيث يمثل على المحور الأفقي الجزء الحقيقي من العدد المركب و يمثل على المحور الرأسي الجزء التخيلي من العدد المركب. أيضا يمكن تمثيل العدد المركب بقطعة مستقيمة موجهة بدايتها في نقطة الأصل $(0,\ 0)$ و نهايتها في النقطة $(x,\ y)$. شكل(2-3) يوضح كيفية تمثيل العدد المركب $z = x + yi$ بيانيا.

تعريف (9): مقياس (طول) العدد المركب $z = x + yi$ يرمز له بالرمز $|z|$ وهو يساوي طول القطعة المستقيمة التي تمثله مرسومة من نقطة الأصل إلى النقطة (x, y) و يمكن حساب مقياس (طول) العدد المركب باستخدام القاعدة التالية

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



شكل(2−3): تمثيل العدد المركب $z = x + yi$ بيانيا.

مثال (26): مثل الأعداد المركبة التالية بيانيا و أوجد مقياس كل واحد منها

$a.\ z_1 = 2 + 3i$.

$b.\ z_2 = 4 - 3i$.

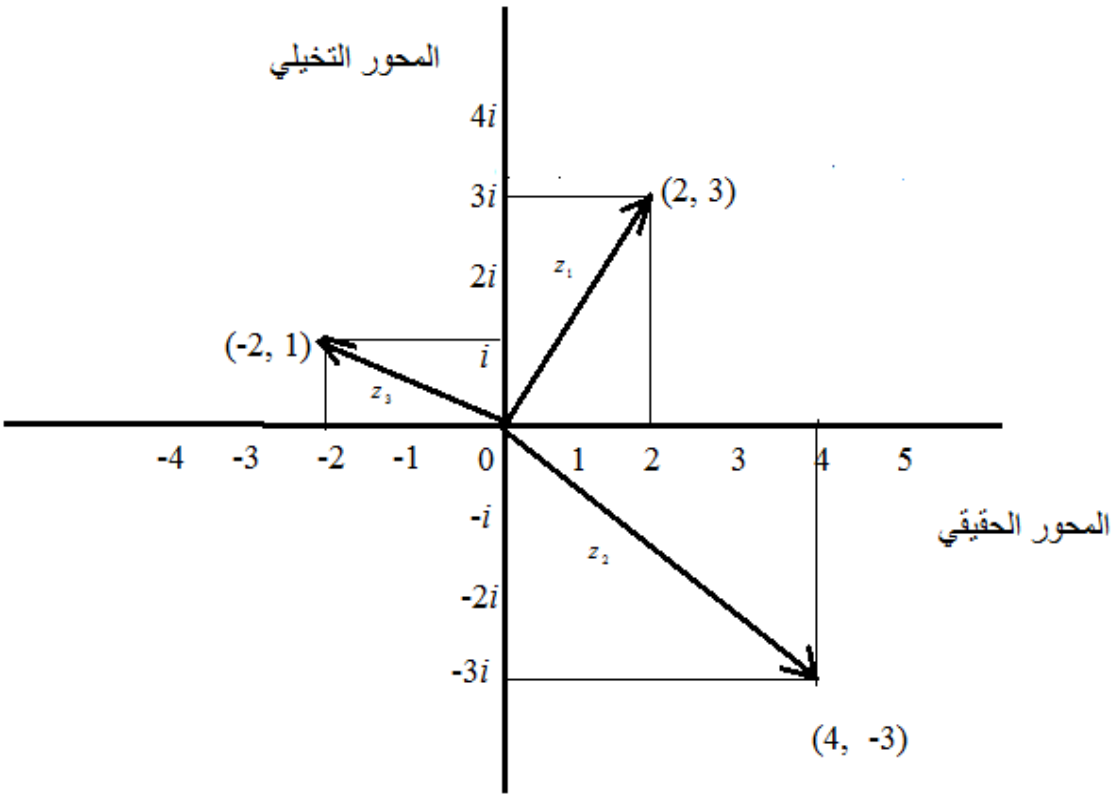
$c.\ z_3 = -2 + i$.

الحل:

$a.\ |z_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$b.\ |z_2| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$c.\ |z_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$



شكل(2-4): تمثيل الأعداد المركبة مثال(26) بيانيا

(2-7) العمليات على الأعداد المركبة

نتناول في هذا الجزء من الوحدة أهم العمليات الجبرية المعرفة على مجموعة الأعداد المركبة و هي الجمع، الطرح، الضرب و القسمة و سنتعرض لخواص هذه العمليات.

1. عملية الجمع

تعريف (10): إذا كان $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددان مركبان فإن مجموعهما العدد المركب z حيث أنه يحسب بالطريقة التالية

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

مثال (27): فيما يلي نوجد حاصل جمع بعض الأعداد المركبة

$a.$ $(2 + 5i) + (5 + i) = 7 + 6i$

$b.$ $(-3 + 4i) + (11 - 5i) = 8 - i$

ملاحظة (15): إذا جمعنا أي عدد مركب مع مرافقه فإن الناتج يكون عدد حقيقي يساوي ضعف الجزء الحقيقي من العدد المركب.

$$z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$$

- **خواص عملية الجمع**

تتميز عملية الجمع بعدة خواص و هي

- **خاصية الإبدال**

إذا كان z_1 و z_2 عددان مركبان فإن

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

- **خاصية التجميع**

إذا كان z_1 ، z_2 و z_3 ثلاثة أعداد مركبة فإن

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

- **خاصية المحايد الجمعي**

المحايد الجمعي لعملية الجمع هو العدد $0 = 0 + 0i$ ، بحيث أنه لكل عدد مركب z يتحقق

$$z + 0 = 0 + z = z$$

- **خاصية النظير الجمعي**

لأي عدد مركب $z = x + yi$ يوجد عدد مركب $-z = -x - yi$ يسمى النظير الجمعي للعدد المركب z بحيث يتحقق

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

2. عملية الطرح

تعريف (11): إذا كان $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددان مركبان فإن حاصل طرح العددين يكون العدد المركب z حيث أنه يحسب بالطريقة التالية

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

مثال (28): هذا المثال يوضح كيفية ايجاد حاصل طرح عددين مركبين

a. $(2 + 5i) - (5 + i) = -3 + 4i$

b. $(-3 + 4i) - (11 - 5i) = -14 + 9i$

ملاحظة (16): ناتج الطرح لأي عدد مركب و مرافقه يساوي ضعف الجزء التخيلي من العدد المركب.

$$z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$$

3. عملية الضرب

تعريف (12): إذا كان $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددان مركبان فإن حاصل ضربهما العدد المركب z حيث إنه يحسب بالطريقة التالية

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

مثال (29): فيما يلي نوجد حاصل ضرب الأعداد المركبة التالية

a.

$$(2+5i)(7+i) = \big((2)(7)-(5)(1)\big) + \big((2)(1)+(7)(5)\big)i$$
$$= 9+37i$$

b.

$$(-3+4i)(11-5i) = \big((-3)(11)-(4)(-5)\big)$$
$$+\big((-3)(-5)+(11)(4)\big)i = -13+59i$$

ملاحظة (17): حاصل ضرب أي عدد مركب مع مرافقه يساوي مربع مقياسه (طوله).

$$z\,\overline{z} = |z|^2$$

مثال (30):

$$(2+3i)\overline{(2+3i)} = (2+3i)(2-3i) = 13 = \left(\sqrt{13}\right)^2 = |2+3i|^2$$

- **خواص عملية الضرب**

تتميز عملية الضرب بعدة خواص و هي

- **خاصية الإبدال**

إذا كان z_1 و z_2 عددان مركبان فإن

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

- **خاصية التجميع**

إذا كان z_1 ، z_2 و z_3 ثلاث أعداد مركبة فإن

$$(z_1 z_2)z_3 = z_1(\,z_2 z_3)$$

- **خاصية المحايد الضربي**

المحايد الضربي لعملية الضرب هو العدد $1 = 1 + 0i$ ، بحيث أنه لكل عدد مركب z يتحقق

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$$

- **خاصية النظير الضربي**

لأي عدد مركب $z = x + yi$ بحيث أن $z \neq 0$ يوجد عدد مركب

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\, i$$

يسمى النظير الضربي للعدد المركب z بحيث يتحقق

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1$$

مثال (31): أوجد النظير الضربي للعدد المركب $z = 2 + 3i$.

الحل: $z^{-1} = (2 + 3i)^{-1} = \frac{2}{2^2+3^2} - \frac{3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

4. عملية القسمة

تعريف (13): إذا كان z_1 و z_2 عددان مركبان بحيث أن $z_2 \neq 0$ فإن حاصل قسمة z_1 على z_2 يحسب بالطريقة التالية

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\, {z_2}^{-1}$$

مثال (32): أوجد حاصل قسمة العدد المركب $4-5i$ على العدد المركب $2+3i$.

الحل:

$$\frac{4-5i}{2+3i} = (4-5i)(2+3i)^{-1} = (4-5i)\left(\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i\right)$$

$$= \left(\frac{8}{13}-\frac{15}{13}\right)+\left(-\frac{12}{13}-\frac{10}{13}\right)i = -\frac{7}{13}-\frac{22}{13}\,i$$

تمارين على الوحدة الثانية

1. اكتب الأعداد النسبية الآتية في أبسط صورة.

$$-\frac{63}{9},\ \frac{42}{56},\ \frac{18}{24}$$

2. رتب الأعداد النسبية الآتية تصاعديا.

$$-\frac{4}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{7}{13},-\frac{15}{17}$$

3. رتب الأعداد النسبية الآتية تنازليا.

$$-\frac{17}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{20}{13},-\frac{27}{5}$$

4. حول الأعداد الكسرية إلى أعداد نسبية و الأعداد النسبية إلى أعداد كسرية.

$$-7\frac{3}{8},\ 8\frac{2}{5},\ \frac{20}{13},\ -\frac{27}{5},\ -13\frac{3}{7},\ 11\frac{7}{9}$$

5. أوجد ناتج العمليات الحسابية الآتية:

a) $3\frac{2}{5}\cdot 8\frac{4}{7}$ b) $7\frac{5}{9}\div 3\frac{1}{8}$

c) $\frac{4}{9}\cdot(\frac{7}{8}-\frac{1}{2})$ d) $\frac{9}{13}\cdot\frac{2}{7}\div\frac{4}{23}$

e) $\frac{3}{4}\cdot(\frac{7}{28}+\frac{18}{36})$

6. أوجد ناتج العمليات الحسابية التالية:

$a)\ \ 1\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{14}$ $\qquad b)\ \ \frac{3}{7}\cdot\frac{6}{13}$ $\qquad c)\ \ 2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{2}{5}$

$d)\ \ \frac{8}{11}\cdot 3$ $\qquad e)\ \ 2\frac{2}{7}\div 1\frac{3}{5}$ $\qquad f)\ \ 8\div\frac{4}{5}$

$g)\ \ \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right)$ $\qquad h)\ \ \frac{5}{7}\cdot\left(\frac{4}{9}\div\frac{8}{27}\right)$ $\qquad i)\ \ \frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}\div\frac{8}{21}$

7. مثل الأعداد الآتية على خط الأعداد.

$$\frac{12}{18},\quad \frac{27}{5},\quad -\frac{12}{5},\quad -4\frac{3}{7},\quad \sqrt{41},\quad \sqrt{18},\quad \sqrt{19},\ \sqrt{20},\ \sqrt{30}$$

8. أوجد ناتج العمليات التالية:-

$a.\ [-4,5]\cap[-1,7)$ $\qquad b.\ (-2,4)\cup[0,6)$

c. $(-1,5]-(-3,-1)$ $\qquad d.\ (0,4)-[1,5)$

$e.\ (-\infty,5)\cap[2,\infty)$ $\qquad f.\ (-1,2]^c$

9. أوجد ناتج العمليات التالية:-

$a)\ \{0\}^c$ $\qquad$ b) $(-\infty,7]\cap[-3,6]$

$c)\ (-\infty,7]-(-3,6]$ $\qquad$ d) $(-\infty,7]\cap[3,\infty)$

$e)\ [4,9]\cap[2,4)$ $\qquad$ f) $(-\infty,1)\cup(0,\infty)$

$g)\ (-4,7)-[-2,9]$

10. أوجد ناتج العمليات الحسابية التالية:

a. $(6-4i)(3+5i)$

b. $\frac{-3+7i}{2+i}$

c. $(-2-5i)\big(11i-(6+4i)\big)$

11. مثل الأعداد المركبة التالية بيانيا و أوجد مقياس كل واحد منها

a. $-3i$.

b. $9+2i$.

c. $-1-5i$.

الوحدة الثالثة

العلاقات و الاقترانات

(3–1) الزوج المرتب

(3–2) ضرب المجموعات

(3–3) العلاقة

(3–4) خواص العلاقات

(3–5) الاقترانات

(3–6) خواص الاقترانات

(3–7) اقترانات خاصة

في هذه الوحدة سندرس المستوى الديكارتي وتمثيل الأزواج المرتبة عليه و سيتم دراسة العلاقات بين المجموعات و خواصها و كحالة خاصة من العلاقات سندرس الاقترانات و اهم المفاهيم المرتبطة بها مثل المجال ، المجال المقابل و المدى وغيرها وسنعطي أمثلة على اقترانات خاصة وتمثيلها بيانيا.

(3–1) الزوج المرتب

إذا كان x و y عنصرين ليسا بالضرورة مختلفين فإن الزوج المرتب (x, y) يتكون من x و y على الترتيب حيث x تسمى الإحداثية الأولى أو الإسقاط الأول أو المدخل الأول و y تسمى الإحداثية الثانية أو الإسقاط الثاني أو المدخل الثاني. عند التعامل مع الأزواج المرتبة يجب مراعاة ما يلي:

1. الحفاظ على ترتيب الإحداثيات للزوج المرتب فالزوج (7، 3) يختلف عن الزوج (3، 7).
2. الزوج المرتب (a, b) يختلف عن المجموعة $\{a, b\}$.
3. $(x, y) = (z, t)$ إذا و فقط إذا كان $x = z$ و $y = t$.

- **التمثيل الديكارتي للأزواج المرتبة**

يستعمل نظام الإحداثيات الديكارتي لتحديد نقطة في مستوي عبر عددين، يطلق عليهما عادة الإحداثية x والإحداثية y. و لتعريف الإحداثيات، نقوم بإسقاط خطين عموديين (محور السينات أو محور X و محور الصادات أو محور Y) كما يجب كذلك تعريف وحدة الطول

أو التدرج والتي نبيّنها على المحورين و نظام الإحداثي المتعامد يسمى بالمستوى الديكارتي تبعا للرياضي والفيلسوف الفرنسي ريني ديكارت (كارتيسيوس باللاتينية)، والذى كان يريد ان يعبر عن موضع نقطة في المستوى عن طريق محورين . و لقد تم تطوير فكرة النظام الإحداثي المتعامد هذه سنة 1637، في كتابتين مختلفتين لديكارت.

شكل (3–1) يوضح المستوى الديكارتي

شكل (3–1): المستوى الديكارتي

و نلاحظ أنه يمكننا تحديد المستوى الديكارتي و تمثيل الأزواج المرتبة عليه بالنقاط الآتية:

1– نرسم خطين متعامدين حيث نُسمي **خط الأعداد الأفقي محور السينات** , ونرمز له بالرمز X **ونسمي خط الأعداد الرأسي محور الصادات** ونرمز له بالرمز Y.

2– و بذلك ينقسم المستوى الديكارتي إلى أربعة أقسام متماثلة تسمى الربع الأول والربع الثاني والربع الثالث والربع الرابع .

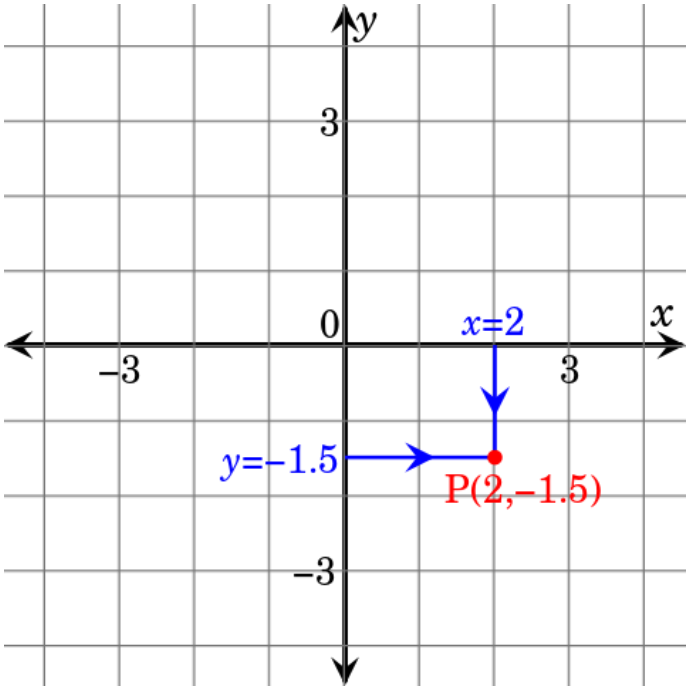
3– نحدد نقطة الأصل في المستوى الديكارتي هي النقطة التي تنتج من تقاطع المحورين المتعامدين (محور السينات و محور الصادات) و تمثّل بالزوج المرتب (0 , 0). ويرمز لها عادةً بالحرف O.

4- نحدد الأعداد الصحيحة على المحورين مع ملاحظة ان الجهة اليسرى من المحور X هو للأعداد السالبة والجهة اليمنى للأعداد الموجبة. والاعلى للأعداد الموجبة والأسفل للأعداد السالبة بالنسبة للمحور Y.

5- كل نقطة في المستوى الديكارتي تمثل بزوج مرتب عنصره الأول (مسقطه الأول) يسمى الإحداثي السيني للنقطة وعنصره الثاني (مسقطه الثاني) يُسمى الإحداثي الصادي لها .

6- لتعيين النقطة (P) التي تمثل بالزوج المرتب (1.5- , 2) في المستوى الديكارتي ,

نبدأ من نقطة الأصل O ونتحرك إلى اليمين بمقدار وحدتين، ثمّ إلى الأسفل بمقدار 1.5 من الوحدات لنصل إلى النقطة المطلوبة P كما في شكل (3-2).



شكل (3-2): مثال لتمثيل نقطة على المستوى الديكارتي

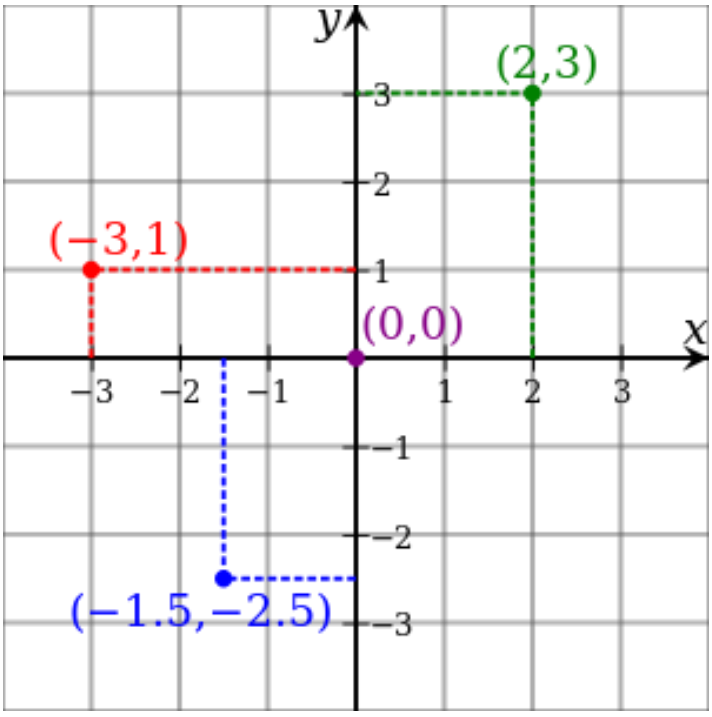
ملاحظة (1): للمستوى الديكارتي (أو الاحداثي) تطبيقات عديدة في الحياة و إليك بعضها لتدرك أهميته

1. نراه في المجالات الطبية في أجهزة تخطيط القلب حيث يتم تحويل ضربات القلب الى رسومات ترسم على مستوى إحداثيات يتم مقارنتها برسومات قلب سليم وعلى أساسها يتم تشخيص الحالة المرضية .
2. نراه في المجالات العلمية في جهاز رصد الزلازل والهزات الأرضية(ريختر) حيث تقاس شدة الزلزال حسب طول الموجه التي يرسمها الجهاز على مستوى ديكارتي.

مثال (1): مثل الأزواج المرتبة الآتية في المستوى الديكارتي:

$(2\ ,\ 3),\ (-3\ ,\ 1),\ (\ -1.5\ ,\ -2.5)$

الحل: انظر شكل (3-3)



شكل (3-3): مثال لتمثيل ثلاث نقاط على المستوى الديكارتي

مثال (2): إذا كان $(2x, 7) = (6, y - 1)$ ، أوجد قيمة كلا من x و y .

الحل: بمقارنة الاحداثيات في الطرفين نجد أن

$2x = 6$ ومنها فإن $x = 3$.

$y - 1 = 7$ ومنها فإن $y = 8$.

(2-3) ضرب المجموعات

تستخدم الأزواج المرتبة لتعريف عملية أخرى على المجموعات تسمى ضرب المجموعات.

تعريف (1): إذا كانت A و B مجموعتين و رمزنا بالرمز A×B للمجموعة المؤلفة من الأزواج المرتبة (a, b) حيث $a \in A$, $b \in B$ فإننا نسمي المجموعة A×B حاصل الضرب الديكارتي (أو الجداء الديكارتي) للمجموعتين A و B.

و يمكننا التعبير عن حاصل الضرب A×B بالمجموعة الآتية:

$$A \times B = \{ (a, b): a \in A, b \in B \}.$$

مثال (3): لتكن A={ 3,5} , B={ 1,2,3} , C={2,5} . أوجد كلا من

1. A×A
2. B×A
3. A×B
4. $A \times (B \cup C)$
5. $(A \times B) \cup (A \times C)$

6. $A \times (B \cap C)$
7. $(A \times B) \cap (A \times C)$

الحل:

1. $A \times A = \{(3,3), (3,5), (5,3), (5,5)\}$
2. $B \times A = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)\}$
3. $A \times B = \{(3,1), (3,2), (3,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$

$$B \cup C = \{1,2,3,5\}$$

4. $A \times (B \cup C) = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,5)$

$$A \times C = \{(3,2), (3,5), (5,2), (5,5)\}$$

5. $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(3,1), (3,2), (3,3), (5,1), (5,2), (5,3), (3,5), (5,5)\}$

$$B \cap C = \{2\}$$

6. $A \times (B \cap C) = \{(3,2), (5,2)\}$
7. $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(3,2), (5,2)\}$

ملاحظة (2):

1. $A \times B \neq B \times A$، أي أن ضرب المجموعات ليس إبدالياً.
2. $|A \times B| = |B \times A| = |A| . |B|$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

- **تمثيل الضرب الديكارتي :**

يتم تمثيل الضرب الديكارتي بعدة طرق منها

1. التمثيل الجدولي:

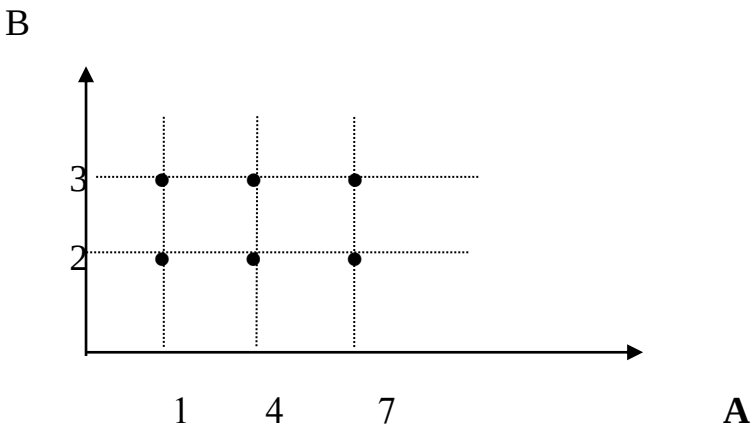
يُمثل الضرب الديكارتي $A\times B$ بجدول ذي مدخلين كما هو مبيّن في جدول (3-1) :

7	4	1	A / B
(7 ، 2)	(4 ، 2)	(1 ، 2)	2
(7 ، 3)	(4، 3)	(1 ، 3)	3

جدول (3-1): التمثيل الجدولي لحاصل الضرب الديكارتي $A\times B$

2. التمثيل البياني :

يُمثل الضرب الديكارتي في هذا النوع من التمثيل بمجموعة نقط من المستوي كما هو مبيّن في شكل (3-4). فالنقطة التي تمثل الزوج المرتب $(x\ ،\ y)$ هي نقطة تقاطع الخط العمودي الذي ينطلق من x والخط الأفقي الذي ينطلق من y و هو كما في شكل (3-4).

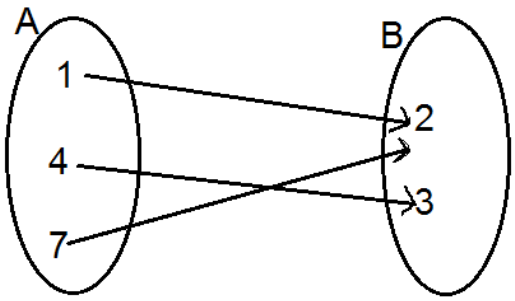


شكل (3-4): التمثيل البياني لحاصل الضرب الديكارتي $A\times B$

3. التمثيل السَّهمي :

في هذا النوع من التمثيل تُمثل المجموعتان A وB بمخططين كما هو مبيّن في الشكل الآتي، ويُمثل كل زوج مرتب $(x ، y)$ من A×B بسهم ينطلق من A ويصل إلى B و يصل بين x و y . فمثلا التمثيل السهمي لحاصل الضرب

$A \times B = \{(1, 2), (4, 3), (7, 2)\}$ و هو كما في شكل (3-5).



شكل (3-5) : التمثيل السهمي لحاصل الضرب الديكارتي

(3-3) العلاقة

تعريف(2) : إذا كانت A و B مجموعتان ، فإن كل مجموعة جزئية من A×B تعرف علاقة من A إلى B. نسمي هذه المجموعة الجزئية بيان العلاقة أي أن بيان العلاقة هو مجموعة الأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة. و نسمي A مجالها و B مجالها المقابل و القاعدة التي نعتمد عليها في اختيار المجموعة الجزئية تسمى قاعدة العلاقة.

مثال(4): لتكن $A = \{2,3,5\}$ و $B = \{7,9,10\}$. أوجد ما يلي:

1. $A \times B$.
2. عناصر العلاقة $\{x$ عامل من عوامل $y : (x,y) \in A \times B\}$=R .
3. مجال العلاقة R.
4. المجال المقابل للعلاقة R.
5. قاعدة العلاقة R.
6. بيان العلاقة R.

الحل:

1. $A\times B = \{(2,7), (2,9), (2,10), (3,7), (3,9), (3,10), (5,7), (5,9), (5,10)\}$
2. $R=\{(2,10), (3,9), (5,10)\}$
3. مجال العلاقة $R = A$.
4. المجال المقابل للعلاقة $B = R$.
5. قاعدة العلاقة R هي : x عامل من عوامل y.
6. بيان العلاقة R هي: $R=\{(2,10), (3,9), (5,10)\}$

ملاحظة (3):

1. إذا كان الزوج المرتب (x, y) ينتمي لبيان العلاقة R المعرفة من A إلى B، فإننا نقول : إن x يرتبط مع y وفق قاعدة العلاقة R و نكتب: $x\,R\,y$ أو $(x,y) \in R$.

2. إذا كان الزوج المرتب (x, y) لا ينتمي لبيان العلاقة R المعرفة من A إلى B، فإننا نقول : إن x لا يرتبط مع y وفق قاعدة العلاقة R و نكتب: $(x,y) \notin R$.

3. إذا كان x R y أو $(x,y) \in$ R ، فإنه العنصر y يسمى صورة العنصر x .

4. يطلق على مجموعة صور العناصر في العلاقة R ، **مدى العلاقة** R. أي أن مدى العلاقة R عبارة عن المجموعة التي تحتوي على المساقط الثانية أو الإحداثيات الصادية y في بيان العلاقة R.

مثال(5): في المثال السابق مدى العلاقة R = { 9, 10} .

5. إذا كان مجال العلاقة R = المجال المقابل للعلاقة A = R , فإننا نقول أن : R علاقة معرفة على A.

مثال(6): إذا كانت

A=

{ 2,3,4,5,6 }=B وكانت R علاقة معرفة من A إلى B وفق القاعدة الآتية:

a R b إذا و فقط إذا كان $b \in$ B و $a \in$ A و كان b = عدد أضلاع a.

أوجد:

1. مجال العلاقة R .
2. المجال المقابل للعلاقة R .
3. قاعدة العلاقة R .
4. مدى العلاقة R.

الحل:

1. مجال العلاقة A =R .

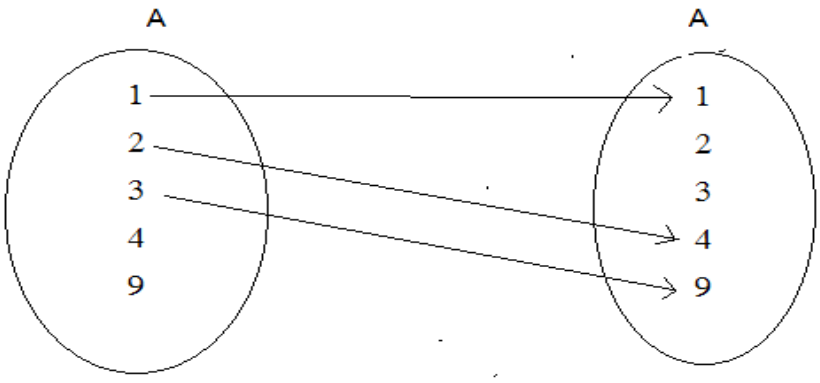
2. المجال المقابل للعلاقة R= B.
3. قاعدة العلاقة R هي a R b إذا و فقط إذا كان b = عدد أضلاع a.
4. مدى العلاقة R هو { 3,4,5}.

مثال(7): إذا كانت { 9 , 4 , 3 , 2 , 1}=A و كانت R علاقة معرفة على A وفق القاعدة الآتية: a R b إذا و فقط إذا كان $a, b \in A$ و كان $b = a^2$ أوجد:

1. مجال العلاقة R .
2. المجال المقابل للعلاقة R .
3. بيان العلاقة R .
4. مدى العلاقة R.
5. أرسم مخططا سهميا يمثل العلاقة R.

الحل:

1. مجال العلاقة R = A
2. المجال المقابل للعلاقة R = A
3. بيان العلاقة R هي: {(1,1), (2,4), (3,9)} R=
4. مدى العلاقة R = {1, 4, 9} .
5.



(3-4) خواص العلاقات

نعلم أنه إذا كان مجال العلاقة R = المجال المقابل للعلاقة A = R ، فإننا نقول أن :
R علاقة معرفة على A. و تكون في هذه الحالة $R \subseteq A \times A$.

تتميز العلاقة على مجموعة بعدة خواص هامة هي : الانعكاس والتماثل والتعدي و التخالف و الترتيب والتكافؤ. و فيما يأتي سندرس كلا من هذه الخواص بالتفصيل.

أولا : خاصية الانعكاس.

عندما يرتبط كل عنصر من A مع نفسه في العلاقة R . أي أنه نقول عن العلاقة R المعرفة على A أنها انعكاسية إذا وفقط إذا كان : $(a,a) \in R$ لكل $a \in A$.

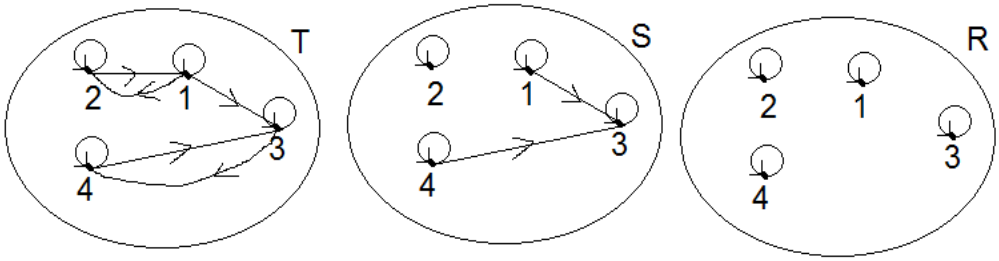
ملاحظة (4): إذا وجدنا عنصراً واحداً في A بحيث إن هذا العنصر لا يرتبط مع نفسه في R تكون العلاقة R علاقة غير انعكاسية.

مثال(8): لتكن $A = \{5,6,8,9\}$

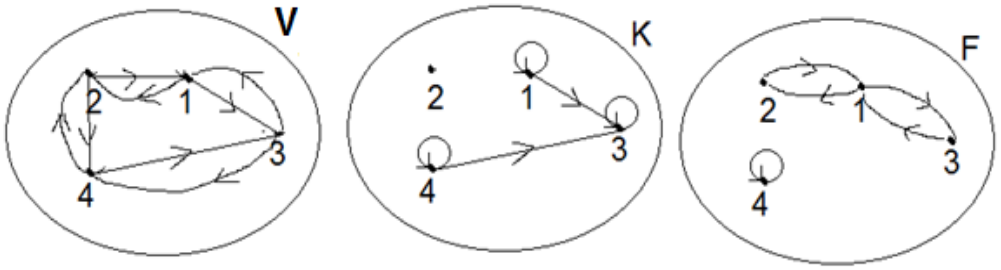
، R ={(9 , 9) , (8, 8) , (5 , 8) , (6 , 6) , (5 , 5) , (6 ,5)}

فإن العلاقة R انعكاسية على A لأنه يرتبط كل عنصر من A مع نفسه في العلاقة R.

مثال(9): كل من العلاقات R و S و T الممثلة بالمخططات السهمية الآتية انعكاسية على A={ 1 , 2 , 3 , 4 }



بينما كل من العلاقات F و K و V الممثلة بالمخططات السهمية الآتية ليست انعكاسية على $A = \{1, 2, 3, 4\}$



ملاحظة (5): المخطط السهمي للعلاقة الانعكاسية على المجموعة A يوجد عروه عند كل عنصر من عناصر المجموعة A.

ثانيا: خاصية التماثل (أو التناظر).

تكون العلاقة R علاقة تماثلية على المجموعة A إذا و فقط إذا كان ارتباط عنصر x بعنصر آخر y في العلاقة R يحتم ارتباط العنصر y بالعنصر x في العلاقة R . أي أنه لكل $(x, y) \in R$ يكون $(y, x) \in R$.

و إذا مثلنا هذه العلاقة بمخطط سهمي, فإننا نلاحظ أنه لكل سهم واصل بين عنصرين يوجد سهم معاكس له.

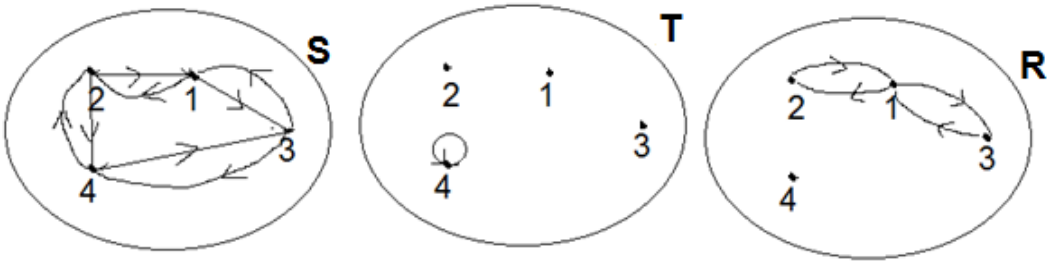
مثال(10): لتكن A={ 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

R={(8 , 8) , (3 , 8)، (7 , 6) , (8 , 3) , (5 , 4) , (6 , 6) ,(4 , 5) ,(6 , 7)}

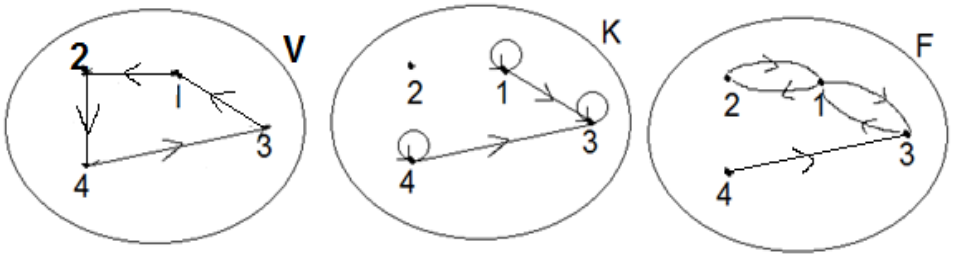
هل العلاقة R تماثلية A ؟

نفحص كل الأزواج المرتبة في العلاقة R ونقوم بتبديل مساقطها ونقوم بالبحث في العلاقة R عن الزوج الناشئ عن تبديل مساقط ذلك الزوج المرتب. نلاحظ أنه لكل $(x,y) \in R$ يكون $(y,x) \in R$. إذن العلاقة R علاقة تماثلية.

مثال(11): كل من العلاقات R و S و T الممثلة بالمخططات السهمية الآتية تمثل علاقة تماثلية على A = { 1 , 2 , 3 , 4 }



بينما كل من العلاقات F و K و V الممثلة بالمخططات السهمية الآتية ليست علاقة تماثلية على A = { 1 , 2 , 3 , 4 }



ثالثا: خاصية التعدي.

تكون العلاقة R علاقة تعدي على المجموعة A : إذا وجدنا أن لكل $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ فإنه يجب أن يكون $(x,z) \in R$. حيث $x,y,z \in A$.

أي نفحص كل الأزواج المرتبة الموجودة في R و لا نفحص عناصر المجموعة A . عندما نجد زوج مرتب $(x,y) \in R$ نبحث إذا يوجد زوج مرتب $(y,z) \in R$ بحيث يكون مسقطه الأول هو نفس المسقط الثاني للزوج المرتب (x,y) ثم نبحث عن الزوج المرتب (x,z) في R بحيث مسقطه الأول هو المسقط الأول للزوج المرتب (x,y) ومسقطه الثاني هو المسقط الثاني للزوج المرتب(y,z).

ملاحظة (6): إذا وجدنا $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ وكان $(x,z) \notin R$ تكون العلاقة R ليست علاقة تعدي.

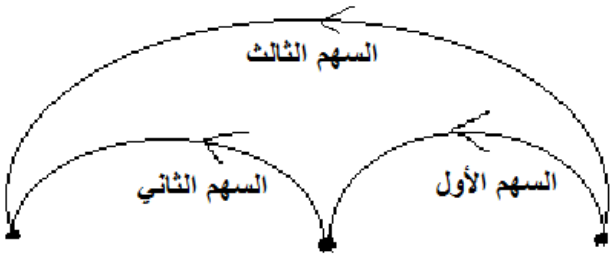
مثال(12): العلاقة الآتية R علاقة متعدية على A={1,2,3,4,7}.

R={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,4), (3,7) , (7,3), (7,4) (3,3), (7,7)}

مثال(13): علاقة " $\geq$ " المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية متعدية لأن إذا كان

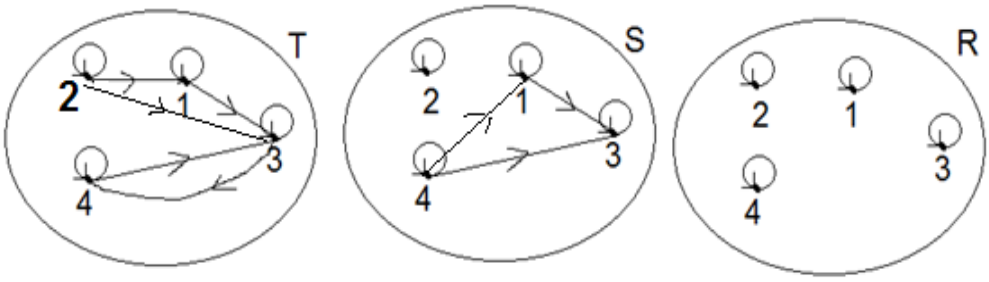
$x \geq y$ وَ $y \geq z$ فإن $x \geq z$.

ملاحظة (7): العلاقة R علاقة متعدية إذا كان لكل سهمين متتاليين يوجد سهم ثالث ينطلق من بداية الأول و يصل لنهاية الثاني كما في شكل (3-6).



شكل (3-6) : التمثيل السهمي للعلاقة المتعدية

مثال(14): حدد أي من العلاقات R و S و T الممثلة بالمخططات السهمية الآتية تمثل علاقة متعدية على A={1 , 2 , 3 , 4 }.



الحل:

R و S علاقات متعدية و لكن العلاقة T غير متعدية.

رابعاً : خاصية التخالف

تكون العلاقة R المعرفة على المجموعة A تخالفيه إذا و فقط إذا كان لكل $(x,y) \in R$ و $(y,x) \in R$ يكون $x = y$. أي أنه إذا كان $x \neq y$ و كان $(x,y) \in R$ فإن $(y,x) \notin R$.

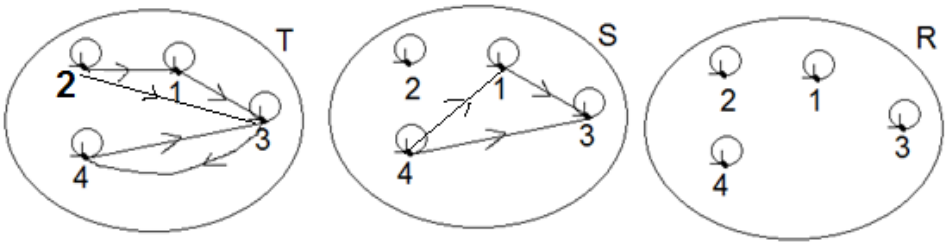
و تكون العلاقة R المعرفة على المجموعة A ليست تخالفيه إذا و فقط إذا وجد $(x,y) \in R$ حيث $x \neq y$ و كان $(y,x) \in R$.

مثال(15): العلاقة $R_1 = \{(3,1),(4,2),(4,4),(2,4)\}$ المعرفة على المجموعة A علاقة ليست تخالفيه، بينما العلاقة التالية فهي تخالفيه

$R_2 = \{(3،1)،(3،2)،(4،4)،(3،3)\}$.

ملاحظة (8): إذا مثلنا العلاقة التخالفيه بمخطط سهمي, فإننا نلاحظ أنه لا وجود لسهمين متعاكسين بين عنصرين مختلفين. بينما إذا مثلنا العلاقة غير التخالفيه بمخطط سهمي, فإننا نلاحظ أنه يوجد عنصران مختلفان بينهما سهمان متعاكسان.

مثال(16): حدد أي من العلاقات R و S و T الممثلة بالمخططات السهمية الآتية تمثل علاقة تخالفيه على A={ 1 ، 2 ، 3 ، 4 }



الحل:

R و S علاقات تخالفيه و لكن العلاقة T ليست تخالفيه.

خامسا : خاصية الترتيب

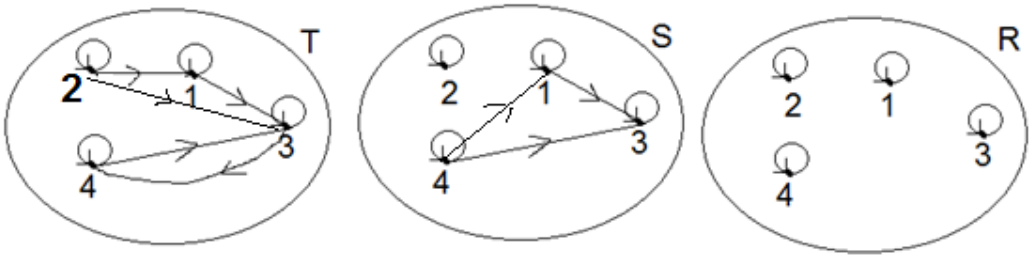
تكون العلاقة R المعرفة على المجموعة A علاقة ترتيب إذا و فقط إذا كانت العلاقة R انعكاسية وتخالفيه ومتعدية معاً.

ملاحظة (9):

1. إذا كانت العلاقة R ليست متعدية تكون العلاقة R ليست علاقة ترتيب.
2. إذا كانت العلاقة R ليست تخالفيه تكون العلاقة R ليست علاقة ترتيب.
3. إذا كانت العلاقة R ليست انعكاسية تكون العلاقة R ليست علاقة ترتيب.

مثال(17): علاقة " ≥ " المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية علاقة ترتيب على مجموعة الأعداد الطبيعية.

مثال(18): حدد أي من العلاقات R و S و T الممثلة بالمخططات السهمية الآتية تمثل علاقة ترتيب على $A=\{1، 2، 3، 4\}$



الحل:

R و S علاقات ترتيب و لكن العلاقة T ليست علاقة ترتيب.

سادسا: خاصية التكافؤ و صفوف التكافؤ

تكون العلاقة R علاقة تكافؤ على المجموعة A عندما تكون علاقة انعكاسية وتماثلية وتعدي معاً.

ملاحظة (10):

1. إذا كانت العلاقة R ليست علاقة تعدي تكون العلاقة R ليست علاقة تكافؤ.
2. إذا كانت العلاقة R ليست علاقة تماثل تكون العلاقة R ليست علاقة تكافؤ.
3. إذا كانت العلاقة R ليست انعكاسية تكون العلاقة R ليست علاقة تكافؤ.

مثال(19): إن علاقة المساواة فوق مجموعة ما هي علاقة تكافؤ.

صفوف التكافؤ :

تعريف (3): لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A وليكن x عنصرًا من A، نسمي صف تكافؤ x المجموعة الجزئية من A التي تتكون من العناصر المرتبطة بالعنصر x وفق العلاقة R ويرمز له بالرمز $[x]$ و يسمى العنصر x ممثلاً لهذا الصف. أي أن

$$[x] = \{y \in A : xRy\}$$

مثال(20): لتكن $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. والعلاقة R معرفة على A وفق القاعدة الآتية:

$(x,y) \in R$ إذا و فقط إذا كان باقي قسمة x على العدد 3 يساوي باقي قسمة y على العدد 3.

1. أوجد بيان العلاقة R .
2. أوجد مدى العلاقة R.
3. أثبت أن العلاقة R علاقة تكافؤ على المجموعة A .
4. أوجد $[x]$ لكل $x \in A$.

الحل:

1. بيان العلاقة R

$$R = \{(0,0),(0,3),(0,6),(1,1),\ (1,4),\ (2,2),(2,5),\ (3,0),(3,3),\ (3,6),\ (4,1),\ (4,4),(5,2),(5,5),\ (6,0),(6,3),\ (6,6)\}$$

2. مدى العلاقة $A = R$.
3. من خلال بيان العلاقة R نجد أنها انعكاسية ، تماثلية ومتعدية ولذلك فهي علاقة تكافؤ على المجموعة A.

.4

$[0] = \{0,3,6\}$ ، $[1] = \{1,4\}$، $[2] = \{2,5\}$ ، $[3] = \{0,3,6\}$ ،

$[4] = \{1,4\}$، $[5] = \{2,5\}$ ، $[6] = \{0,3,6\}$

خواص صفوف التكافؤ :

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن صفوف التكافؤ تحقق الخواص التالية:

1. كل صف تكافؤ يمثل مجموعة غير خالية لأنه على الأقل يشمل ممثل الصف.
2. صفوف التكافؤ تمثل مجموعات منفصلة مثنى مثنى لأنه لأي صفي تكافؤ $[x]$ و $[y]$ إما $[x] = [y]$ أو $[x] \cap [y] = \emptyset$.
3. اتحاد صفوف التكافؤ هو المجموعة الكلية A.

مثال(21): لتكن A={ 1، 2، 7، 3، 4 } و

R={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (4,4), (3,7) , (7,3), (3,3), (7,7)}

1. أثبت أن العلاقة R علاقة تكافؤ على المجموعة A .
2. أوجد جميع صفوف التكافؤ للعلاقة R.

الحل:

1. العلاقة R علاقة تكافؤ لأنها انعكاسية وتماثلية ومتعدية.
2. $[1] = \{1,2\} = [2]$ و $[3] = \{3,7\} = [7]$ و $[4] = \{4\}$.

(3-5) الاقترانات

لتكن R علاقة معرفة من A إلى B بحيث كان: كل عنصر من A يرتبط بعنصر واحد فقط من B. إذن نقوم بربط كل عنصر x من A بعنصر وحيد y من B . و نسمي f اقتران من A إلى B و نكتب $f: A \to B$ أو $A \xrightarrow{f} B$.

ونرمز للعنصر y بالرمز $f(x)$ (أي أن $y = f(x)$ وتمثل صورة العنصر x وفق قاعدة الاقتران أو قيمة الاقتران f). و نسمي A مجال الاقتران و B المجال المقابل للاقتران.

ملاحظة (11):

1. الاقتران هو حالة خاصة من العلاقة وبالتالي فإن كل الاقترانات هي علاقات ولكن ليس كل علاقة هي اقتران.

2. في الاقتران لا يوجد زوجان مرتبان لهما نفس العنصر الأول أو الإحداثي الأول.

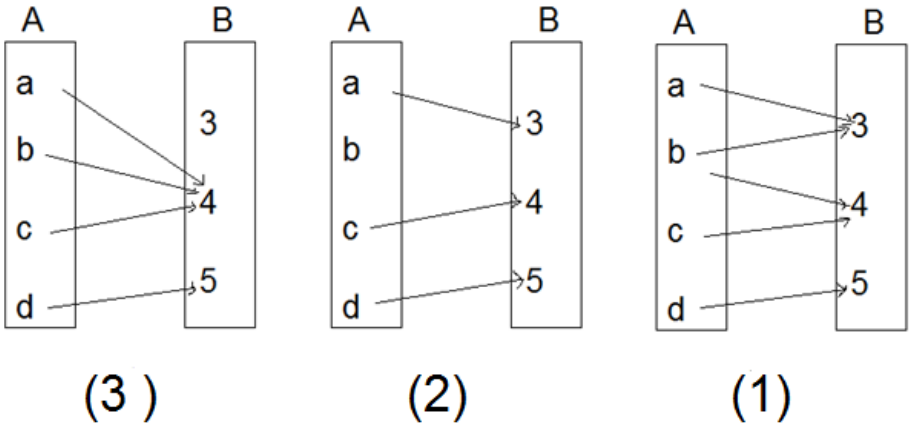
3. في الاقتران كل عنصر من عناصر المجال يجب أن يكون موجودا و يمثل الإحداثي الأول في أحد الأزواج المرتبة.

4. الاقتران هو حالة خاصة من العلاقة . وبذلك يمكننا تمثيل الاقتران بالطرق التي درسناها سابقا لتمثيل العلاقة .

5. نقول أن الاقترانين $f:A \to B$ و $g:C \to D$ متساويان و نرمز لذلك بالرمز $f = g$ إذا تحقق الشرطان التاليان :

- A= C .
- $f(x) = g(x)$ لكل $x \in A = C$.

مثال(22): لتكن A={ a, b, c, d } و B={ 3, 4, 5 } . أي من المخططات السهمية الآتية يمثل اقترانا من A إلى B ؟



الحل:

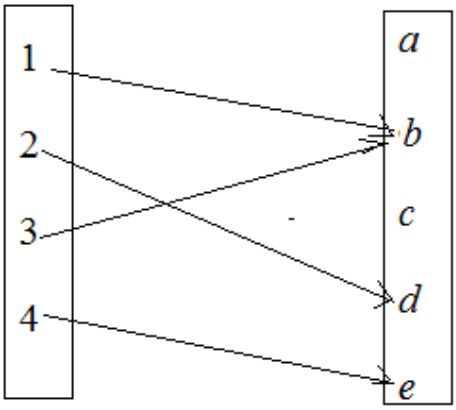
المخطط السهمي الثالث يمثل اقترانا.

مثال(23): لتكن B={ a, b, c, d, e } و A={1,2, 3, 4 } و لتكن R علاقة معرفة من A إلى B بحيث كان: R={(1, b), (2,d), (3,b), (4,e) }

1. أرسم مخططا سهميا يمثل العلاقة R.
2. هل العلاقة R تمثل اقترانا من A إلى B ؟
3. إذا كانت اقترانا فاكتب مجاله و مجاله المقابل و مداه .

الحل:

1.



2. نعم.

3. مجال الاقتران A و مجاله المقابل B ومداه $\{ b, d, e \}$.

(3–6) خواص الاقترانات

سندرس فيما يأتي خواص الاقترانات وهي: الاقترانات الشاملة و المتباينة و المتقابلة.

أولا: الاقتران الشامل.

نقول عن الاقتران f المعرف من المجموعة A إلى المجموعة B أنه اقتران شامل إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من عناصر المجموعة B سابقة على الأقل في A.

أي أن f شامل إذا وفقط إذا كان لكل عنصر $y \in B$، يوجد عنصر $x \in A$ حيث أن $y = f(x)$. أي أن مدى الاقتران = المجال المقابل للاقتران.

ملاحظة (12): يكون f اقتران غير شامل إذا وجد على الأقل عنصر من B ليس له سابقة في A أي أنه يوجد عنصر $y \in B$ و $y \neq f(x)$، لكل $x \in A$.

مثال(24): ليكن f اقتران معرف كما يلي :

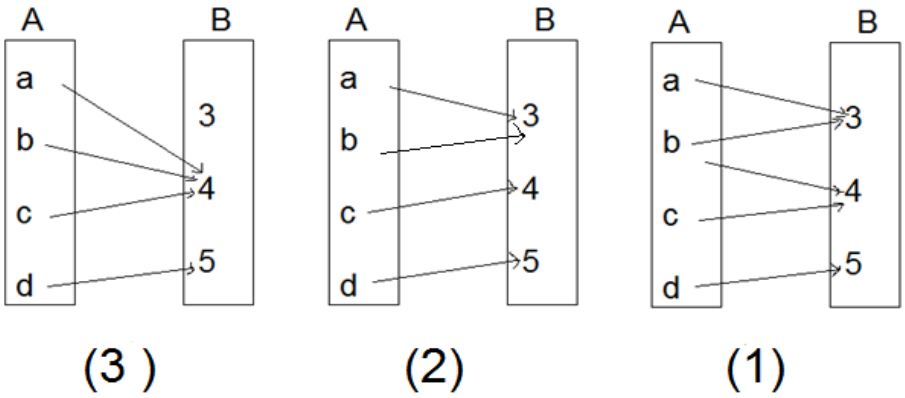
$f: A \to B$ حيث $B=\{1, 4, 6, 9\}$ و $A=\{1,2, 3\}$ و كان $f(x) = x^2$.

هل f اقتران شامل ؟

الحل:

لا، لان 6 ليس له سابقة في A.

مثال(25): لتكن $A=\{a, b, c, d\}$ و $B=\{3, 4, 5\}$. أي من المخططات السهمية الآتية يمثل اقترانا شاملا من A إلى B ؟



الحل:

المخطط السهمي الثاني يمثل اقترانا شاملا من A إلى B.

ثانيا: الاقتران المتباين(أو واحد لواحد)

نقول عن الاقتران f المعرف من المجموعة A إلى المجموعة B أنه اقتران متباين إذا وفقط إذا كان كل عنصر من المجموعة B صورة لعنصر على الأكثر من المجموعة A.
أو كل عنصر من مداه صورة لعنصر واحد فقط من عناصر مجاله A.

أي أن f متباين إذا وفقط إذا كان لكل عنصرين مختلفين $x_2 \neq x_1$ في المجموعة A، فإن $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ملاحظة (13): يكون f اقتران غير متباين إذا وجد عنصرين مختلفين $x_2 \neq x_1$ في المجموعة ، و كان $f(x_1) = f(x_2)$.

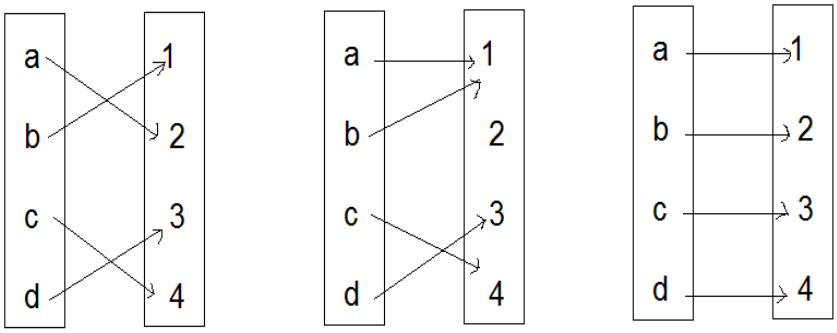
مثال(26): ليكن f اقتران معرف كما يلي :

$f: A \to B$ حيث B={ 1, 4, 6, 9 } و A={1,2, 3} و كان $f(x) = x^2$. هل f اقتران متباين؟

الحل:

نعم لان كل عنصر في المدى له سابقة واحدة فقط في المجال.

مثال(27): لتكن A={ a, b, c, d } و B={1,2, 3, 4}. أي من المخططات السهمية الآتية يمثل اقترانا متباينا من A إلى B ؟



الحل:

كل من المخطط السهمي الأول و الثالث يمثل اقترانا متبايناً من A إلى B.

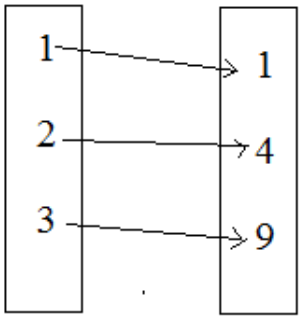
ثالثا: اقتران التقابل

نقول عن الاقتران f المعرف من المجموعة A إلى المجموعة B أنه اقتران تقابل إذا وفقط إذا كان شاملا و متباينا.

مثال(28): ليكن f اقتران معرف كما يلي :

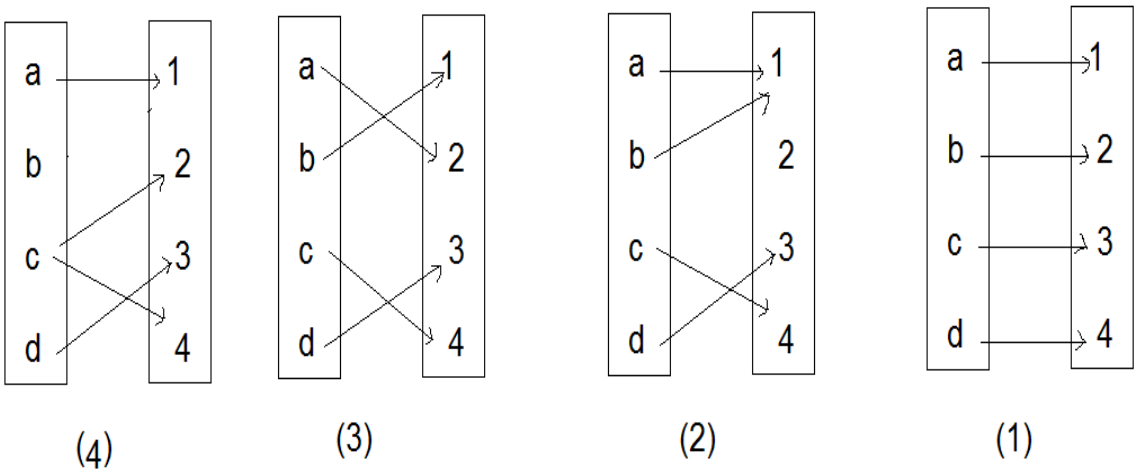
$f: A \to B$ حيث B={ 1, 4, 9 } و A={1,2, 3} و كان $f(x) = x^2$. هل f اقتران تقابل؟ وضح اجابتك.

الحل:



من المخطط السهمي للاقتران f نلاحظ أنه اقتران شامل ومتباين و بالتالي فهو اقتران تقابل.

مثال(29): لتكن $A=\{ a, b, c, d \}$ و $B=\{ 1, 2, 3, 4 \}$. أي من المخططات السهمية الآتية يمثل اقتران تقابل من A إلى B ؟



الحل:

كل من المخطط السهمي الأول و الثالث يمثل اقتران تقابل من A إلى B.

(3-7) اقترانات خاصة

سنتناول في هذا البند ثلاث اقترانات جبرية شائعة هي الاقتران الخطي، الاقتران التربيعي و اقتران القيمة المطلقة.

أولا: الاقتران الخطي

الاقتران الخطي هو اقتران f معرف على مجموعة الأعداد الحقيقية R و قاعدته على الصورة : $f(x) = mx + b$ حيث $m,\ b \in \mathbf{R}$ و $m \neq 0$.

و التمثيل البياني للاقتران الخطي هو خط مستقيم. لذلك لكي نرسم التمثيل البياني للاقتران الخطي نختار عنصرين من المجال و نحسب صورتيهما و نعين نقطتين تمثلان العنصرين و صورتيهما في المستوى و نصل بينهما بخط مستقيم فيكون هو بيان الاقتران f .

ملاحظة (14):

1. إذا كانت $m = 0$ في المعادلة $f(x) = mx + b$, فإن الاقتران $f(x) = b$، يسمى اقتران ثابت و يمثل بخط مستقيم أفقي يوازي محور السينات و عمودي على محور الصادات و يقطعه في النقطة $(0,\ b)$. ويكتب الاقتران على الصورة $y = b$، لان الاحداثي الصادي لكل النقاط التي تقع على الخط المستقيم يساوي b.

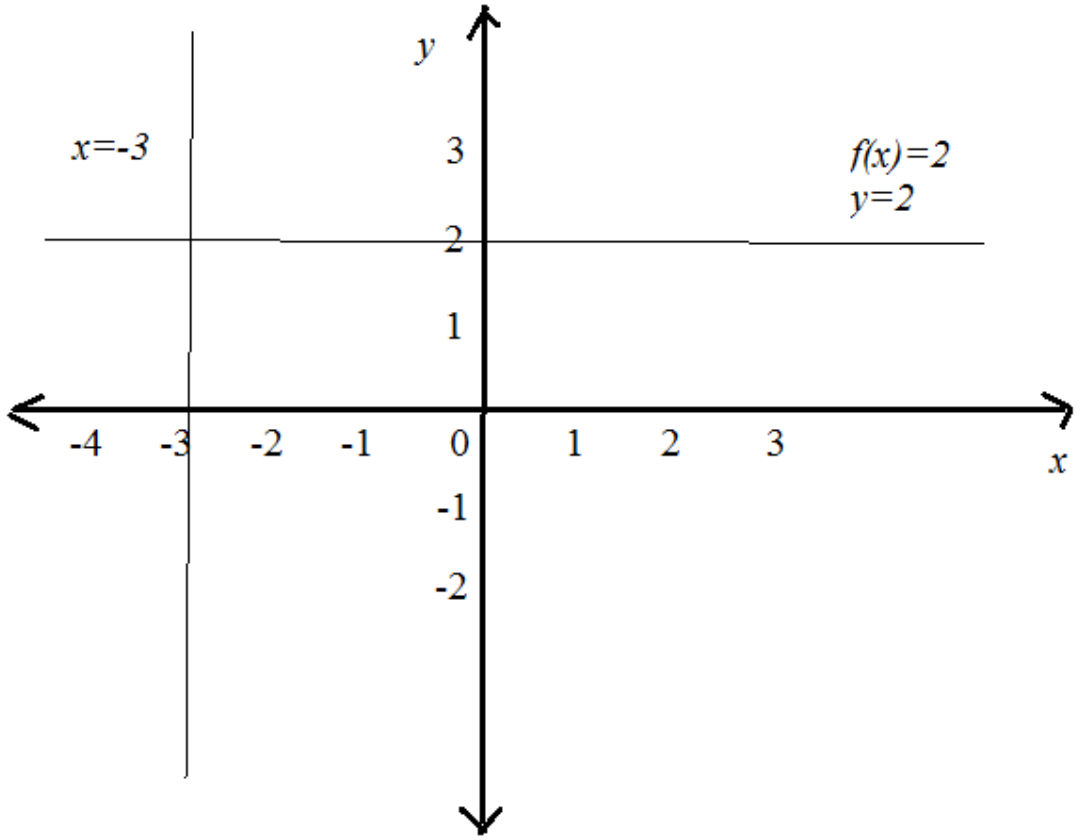
2. المعادلة التي تمثل خطاً مستقيماً يوازي محور الصادات و عمودي على محور السينات و يقطعه في النقطة $(a,\ 0)$. تكتب على الصورة $x = a$ ، لان الاحداثي السيني لكل النقاط التي تقع على الخط المستقيم يساوي a، علما بأن هذه المعادلة لا تمثل اقتران.

مثال(30):

1. ارسم الاقتران f المعرف كما يلي : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ حيث $f(x) = 2$ ، $y = 2$
2. ارسم العلاقة على $\mathbf{R}$ حيث $x = -3$.

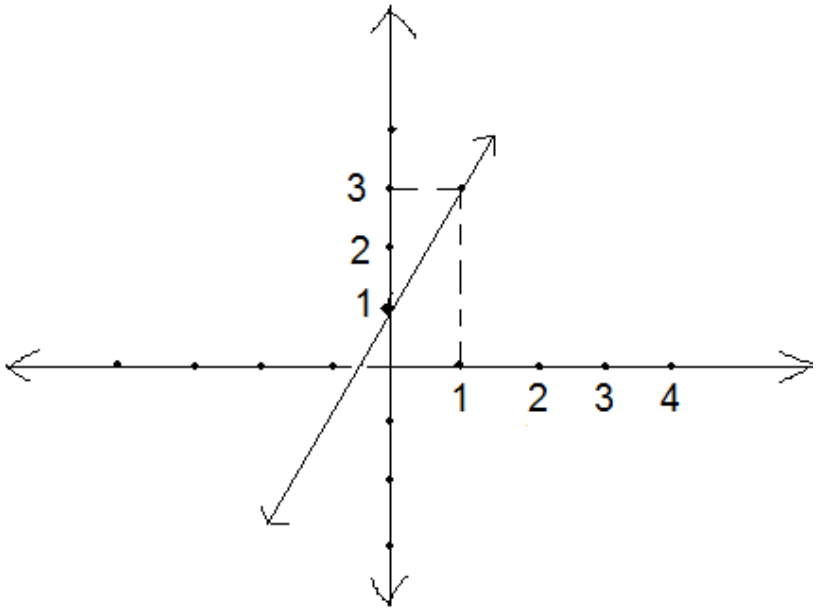
الحل:

1. الاقتران عبارة عن خط مستقيم عمودي على محور الصادات ويقطعه عند النقطة $(0, 2)$، كما هو موضح في الشكل التالي.
2. الاقتران عبارة عن خط مستقيم عمودي على محور السينات ويقطعه عند النقطة $(-3, 0)$، كما هو موضح في الشكل التالي.



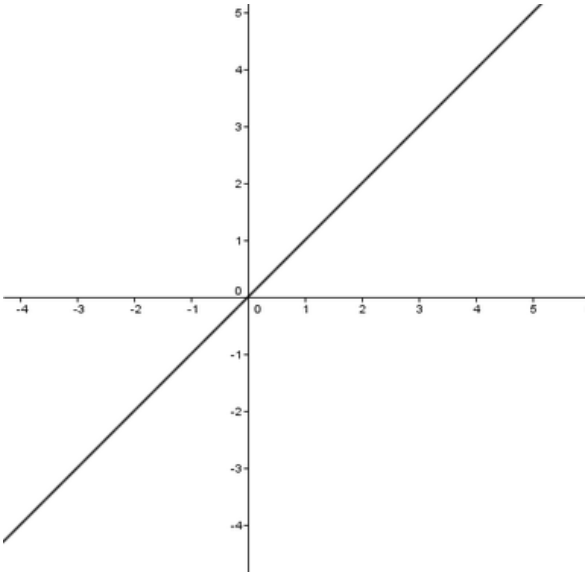
مثال(31): ارسم الاقتران f المعرف كما يلي : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ حيث $f(x) = 2x + 1$.

الحل: نحدد النقطتين $(1,\ 3)$ و $(0,\ 1)$ على مستوى الاحداثيات ثم نرسم المستقيم الذي يصل بينهما و هو يمثل التمثيل البياني للاقتران $f(x) = 2x + 1$, كما هو مبين بالشكل الآتي:



مثال (32): الاقتران المحايد

الاقتران f المعرف كما يلي : $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ حيث $f(x)=x$ يسمى الاقتران المحايد والتمثيل البياني للاقتران المحايد كما يلي:



شكل (3-7) : التمثيل البياني للاقتران المحايد

ملاحظة (15): يمكن تمثيل الاقتران الخطي $f(x) = mx + b$ بطريقة أخرى، يطلق عليها اسم طريقة المقاطع كما يأتي:

- نجد المقطع السيني و ذلك بوضع $f(x) = 0$ ، و التي تمثل محور السينات و نجد قيمة x في المعادلة $f(x) = mx + b$ و لتكن x_0 ثم نمثل النقطة $(x_0,\ 0)$ على مستوى الاحداثيات.

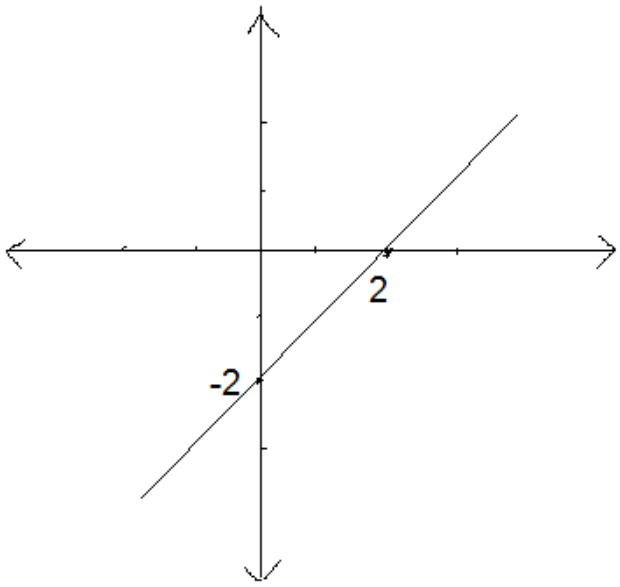
- نجد المقطع الصادي و ذلك بوضع $x = 0$ ، و التي تمثل محور الصادات و نجد قيمة $f(0) = b$ في المعادلة $f(x) = mx + b$ ثم نمثل النقطة $(0,\ b)$ على مستوى الاحداثيات.

- نرسم المستقيم الذي يصل بين النقطتين $(x_0,\ 0)$ و $(0,\ b)$ و هو يمثل التمثيل البياني للاقتران المطلوب .

مثال(33): ارسم الاقتران f المعرف كما يلي : $f: \mathbf{R} \to \boldsymbol{R}$ حيث $f(x) = x - 2$

الحل:

- نجد المقطع السيني و ذلك بوضع $f(x) = x - 2 = 0$ و هذا يعطينا $x = 2$. و بذلك نحصل على النقطة $(2,\ 0)$.
- نجد المقطع الصادي و ذلك بوضع $x = 0$ و بذلك يكون $f(0) = -2$ و بذلك نحصل على النقطة $(0,\ -2)$.
- نرسم المستقيم الذي يصل بين النقطتين $(2,\ 0)$ و $(0,\ -2)$ و الذي يمثل التمثيل البياني للاقتران كما يأتي:

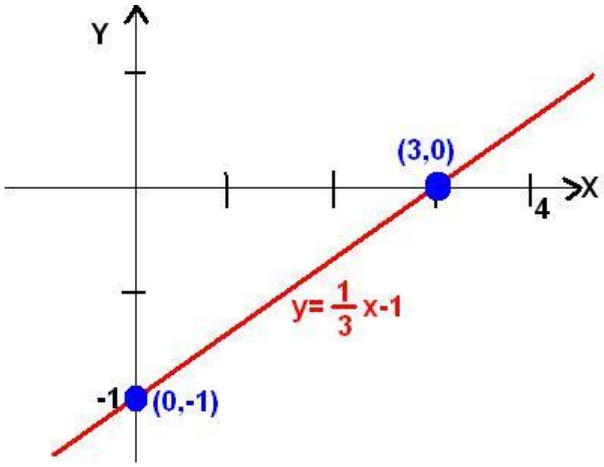


ملاحظة (16): في الاقتران الخطي $f(x) = mx + b$

1. يسمى m معامل x أو ميل الاقتران الخطي ويسمى b الحد الثابت او الجزء المقطوع من محور الصادات، لأنه كما لاحظنا سابقا ينتج عندما نجعل $x = 0$.
2. إذا كان $b = 0$, فإن التمثيل البياني للاقتران الخطي يمر بنقطة الأصل $(0,\ 0)$.
3. إذا كانت $m > 0$، يكون ميل المستقيم الذي يمثل الاقتران الخطي موجب و يكون المستقيم في جزئه العلوي مائلا نحو اليمين.
4. إذا كانت $m < 0$، يكون ميل المستقيم الذي يمثل الاقتران الخطي سالب و يكون المستقيم في جزئه العلوي مائلا نحو اليسار.

مثال(34): ارسم الاقتران f المعرف كما يلي : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ حيث $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$

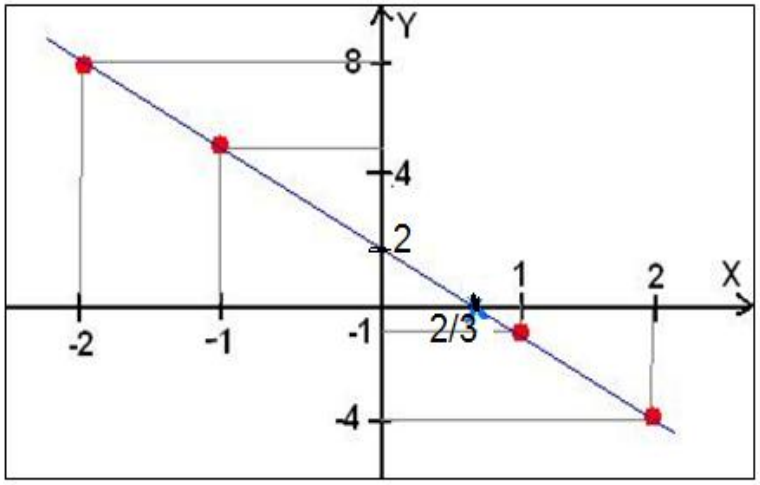
الحل: نلاحظ أن الاقتران خطي يمثل خط مستقيم ميله موجب



مثال(35): ارسم الاقتران f المعرف كما يلي : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ حيث

$$f(x) = -3x + 2 \text{ .}$$

الحل: نلاحظ أن الاقتران خطي يمثل خط مستقيم ميله سالب



مثال(36): في الشكل التالي توجد عدة مستقيمات ومقابله معادلات هذه المستقيمات. أعط كل معادلة رقم المستقيم الذى تمثله.

$y = 2x + 3$

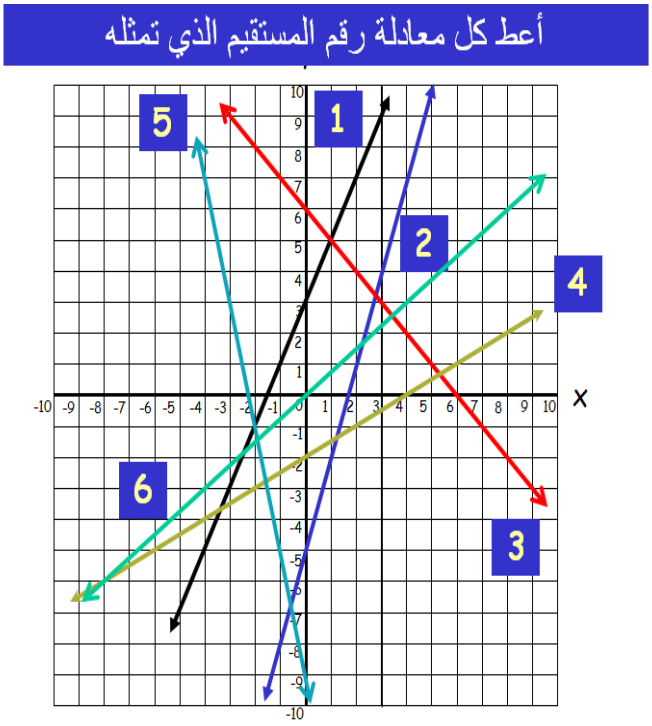
$y = 3x - 5$

$y = -x + 6$

$Y = \frac{1}{2}x - 2$

$Y = -4x - 9$

$y = \frac{3}{4}x$



شكل (3−8) : التمثيل البياني لمثال(43)

الحل:

المعادلة $y = 2x + 3$ تمثل المستقيم رقم 1.

المعادلة $y = 3x - 5$ تمثل المستقيم رقم 2.

المعادلة $y = -x + 6$ تمثل المستقيم رقم 3.

المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ تمثل المستقيم رقم 4.

المعادلة $y = -4x - 9$ تمثل المستقيم رقم 5.

المعادلة $y = \frac{3}{4}x$ تمثل المستقيم رقم 6.

ملاحظة (17): أي خطين مستقيمين إما يكونان متوازيين أو متقاطعين.

1. الخطان المستقيمان متوازيان إذا و فقط إذا تساوا ميليهما.
2. الخطان المستقيمان متعامدان إذا و فقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1.

مثال(37): أوجد ميل كل من الخط المستقيم الذي يوازى الخط المستقيم الذي معادلته $3y + 2x = 2$. ثم أوجد ميل العمودي عليه.

الحل:

ميل الخط المستقيم الموازي يساوي $-\frac{2}{3}$ وميل العمودي يساوي $\frac{3}{2}$.

ثانيا: الاقتران التربيعي.

الصورة العامة للاقتران التربيعي هي $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ حيث أن

$a, b, c \in \mathbf{R}$ و $a \neq 0$.

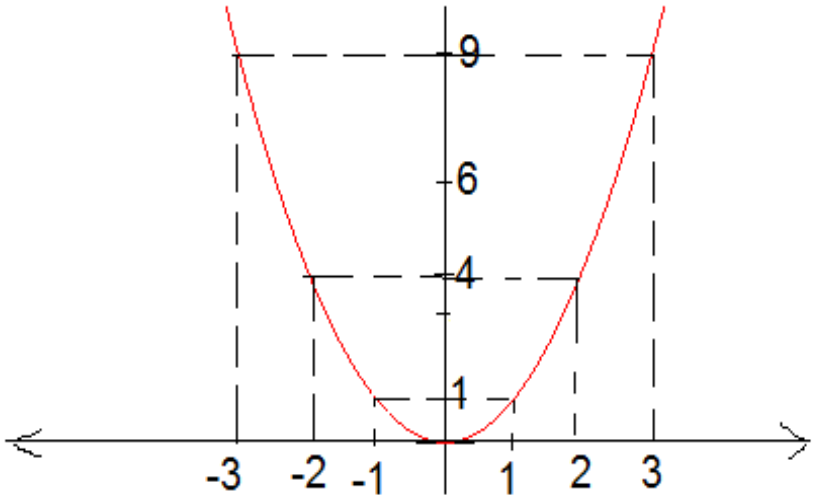
اذا لم يحدد المجال في السؤال ، يعتبر المجال جميع الاعداد الحقيقية **R**، اما مدى الاقتران فهو مجموعة جميع القيم الممكنة للاقتران.

التمثيل البياني للاقتران التربيعي الذي مجاله **R**:

لنأخذ ابسط اقتران تربيعي $f(x) = x^2$ ولنحاول رسمه بيانيا.

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	0	1	4	9	1	4	9

ونعين هذه النقاط على المستوى الديكارتي



واذا حاولنا دراسة هذا الاقتران بشكل اكثر فإننا نلاحظ ما يأتي :

1. اصغر قيمة يأخذها الاقتران هي 0 وتحدث عند النقطة $(0,\ 0)$.
2. الاقتران متماثل حول محور y .
3. مدى الاقتران $\{y: y \geq 0\}$.
4. النقطة $(0,\ 0)$تسمى الرأس.
5. يسمى المنحنى المرسوم اعلاه قطعا مكافئا.

ملاحظة (18): ان التمثيل البياني لأي اقتران تربيعي هو قطع مكافئ.

ملاحظة (19): في الاقتران التربيعي $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

1. إذا كانت $a > 0$ ، يكون منحنى الاقتران مفتوحا نحو الأعلى , و يبقى مجاله **R** أما مداه فيكون $[f\left(-\frac{b}{2a}\right),\ \infty)$.

2. إذا كانت $a < 0$ ، يكون منحنى الاقتران مفتوحا نحو الأسفل و يبقى مجاله **R** أما مداه فيكون $]-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)]$.

3. الاحداثي السيني لرأس المنحنى هو $-\frac{b}{2a}$ و الاحداثي الصادي هو $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

4. لرسم محنى الاقتران التربيعي نحدد نقطة رأس المنحنى ثم نحدد نقطتين على يمينها و نقطتين على يسارها ثم نصل بين النقاط الخمسة و نتأكد من إشارة a أن القطع المكافئ مفتوح في الاتجاه الصحيح

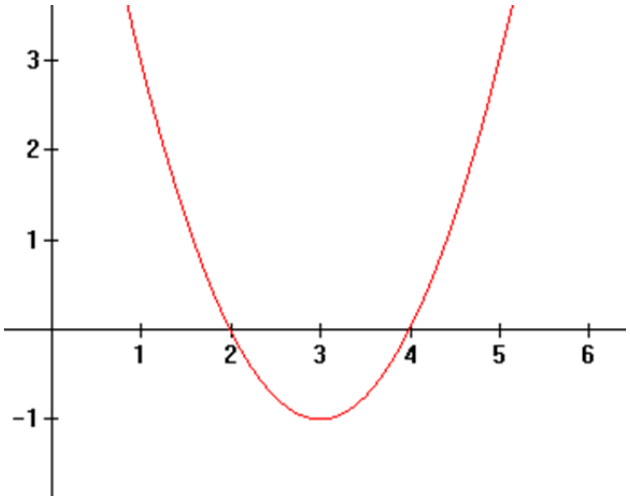
مثال(38): مثل بيانيا الاقتران التربيعي $f(x) = x^2 - 6x + 8$، ثم أوجد كلا من مجاله و مداه.

الحل: $a > 0$, لذلك القطع المكافئ مفتوح للأعلى و مجاله **R**

الاحداثي السيني لرأس المنحنى هو: $-\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2(1)} = 3$

و الاحداثي الصادي هو $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(3) = -1$

إذن رأس المنحنى هو $(3, -1)$ و مداه $[-1, \infty)$. و التمثيل البياني للاقتران $f(x) = x^2 - 6x + 8$ كما في الشكل التالي:



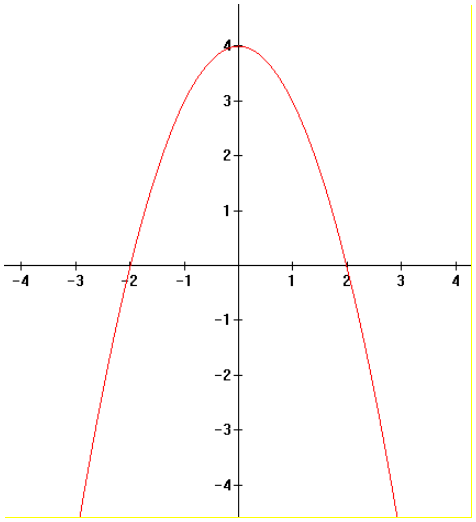
مثال(39): مثل بيانيا الاقتران $f(x) = -x^2 + 4$، أوجد كلا من مجاله و مداه.

الحل: $a < 0$, لذلك القطع المكافئ مفتوح للأسفل و مجاله **R**

الاحداثي السيني لرأس المنحنى هو $-\frac{b}{2a} = -\frac{(0)}{2(-1)} = 0$

و الاحداثي الصادي هو $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(0) = 4$

إذن رأس المنحنى هو $(0, 4)$ و مداه $(-\infty, 4]$. و التمثيل البياني للاقتران $f(x) = -x^2 + 4$ كما يأتي:



ثالثا: اقتران القيمة المطلقة.

اقتران القيمة المطلقة مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية و لكل عدد حقيقي x فإنه يرمز للقيمة المطلقة له بالرمز $|x|$، و يعرف الاقتران كما يلي

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

مدى الاقتران $= [0, \infty)$.

فمثلا

$$|4| = 4, \quad |-2| = 2, \quad |-1.5| = 1.5, \quad |12.8| = 12.8$$

ويمكن تعريف اقتران القيمة المطلقة بالصورة التالية

$$y = |x| = \sqrt{x^2}$$

فمثلا

$$|4| = \sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4, \quad |-2| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

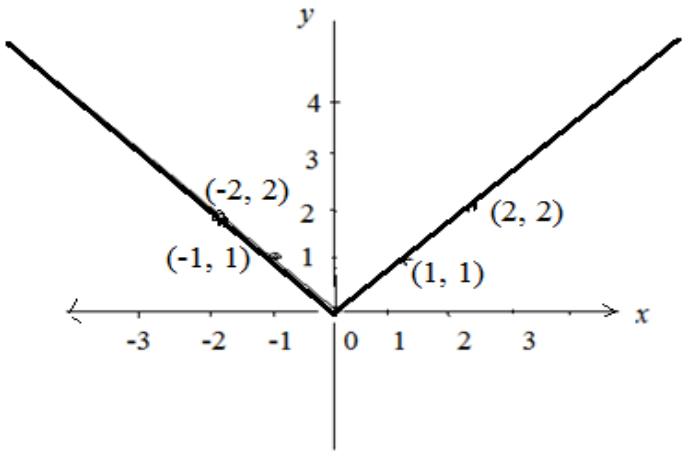
خصائص اقتران القيمة المطلقة: و يتميز اقتران القيمة المطلقة بالخواص التالية

1. لكل عدد حقيقي x ، $|x| = 0$ إذا وفقط إذا $x = 0$.
2. لأي عددين حقيقيين x ، y فإن $|x - y|$ تمثل المسافة بين x ، y.
3. $|x| = |-x|$.
4. $|xy| = |x||y|$.
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

مثال(40): مثل بيانيا اقتران القيمة المطلقة.

الحل:

x	-2	-1	0	1	2
$y=\|x\|$	2	1	0	1	2



شكل(3−9) : التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة

مثال(41): ارسم الاقتران f المعرف كما يلي : $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ حيث

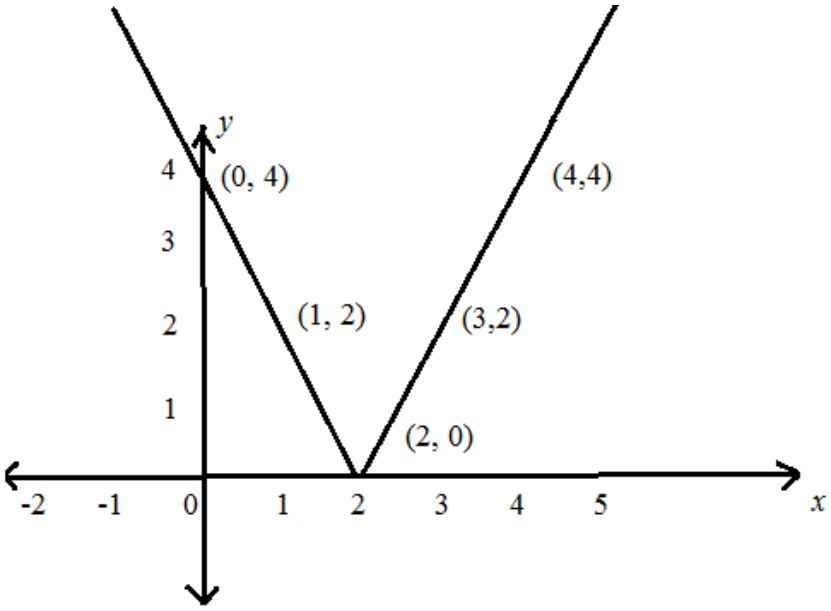
$$f(x)=|2x-4|.$$

الحل:

$$y=|2x-4|=\begin{cases}2x-4, & (2x-4)\geq 0,\\ -(2x-4), & (2x-4)<0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x-4, & x\geq 2,\\ -(2x-4), & x<2.\end{cases}$$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	2	0	2	4



تمارين على الوحدة الثالثة

1. لتكن A={ 2, 4, 6} ، B={ 3, 4} و C={1, 6}. أوجد كلا من

   a. A×A
   b. B×A
   c. A×B
   d. $A\times(B\cup C)$
   e. $(A\times B)\cup(A\times C)$
   f. $A\times(B\cap C)$
   g. $(A\times B)\cap(A\times C)$

2. إذا كانت A={ 1, 3, 4, 6 }, B={ 3, 7, 8, 9, 11 } و كانت R علاقة معرفة من A إلى B وفق القاعدة الآتية: $a\,R\,b$ إذا و فقط إذا كان $a\in A$ و $b\in B$ و كان $b=2a+1$. أوجد ما يلي:

   a. مجال العلاقة R .
   b. المجال المقابل للعلاقة R .
   c. قاعدة العلاقة R .
   d. بيان العلاقة R .
   e. مدى العلاقة R.
   f. أرسم مخططا سهميا يمثل العلاقة R.

3. لتكن A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} . و العلاقة R معرفة على A وفق القاعدة الآتية: $(x,y)\in R$ إذا و فقط إذا كان $y=x-1$.

a. أوجد بيان العلاقة R .

b. أوجد مدى العلاقة R.

c. هل العلاقة R علاقة تكافؤ على المجموعة A . وضح اجابتك.

4. لتكن B={ 1, 2, 5, 9, 10} و A={-1, 0, 2, 3} .

a. أثبت أن $f: A \to B$ حيث $f(x) = x^2 + 1$ تمثل اقترانا من A إلى B.

b. أوجد مدى الاقتران f .

c. هل الاقتران f اقتران تقابل؟ وضح اجابتك.

5. ارسم الاقتران f المعرف كما يلي : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ حيث $f(x) = -2x + 4$.

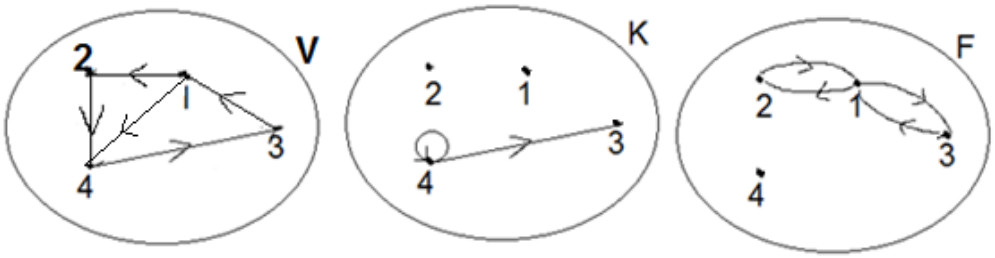
6. ارسم الاقتران f المعرف كما يلي : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ حيث $f(x) = -4x^2 + 8x - 3$

7. ارسم الاقتران f المعرف كما يلي : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ حيث $f(x) = -2|x|$.

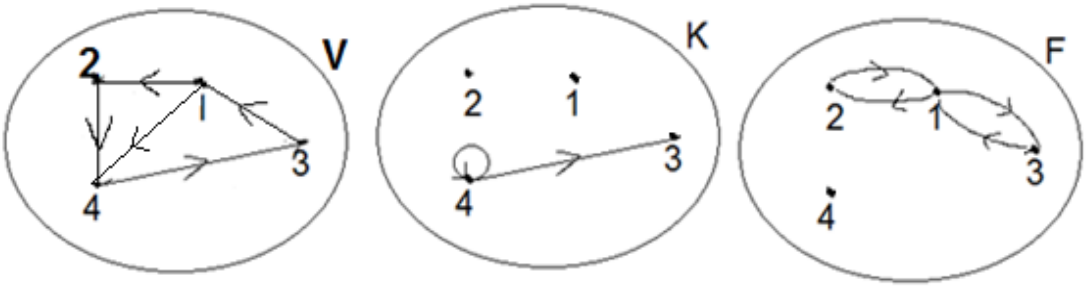
8. ارسم الاقتران f المعرف كما يلي : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ حيث

$f(x) = 3|x - 1| + 2$ ، ثم أوجد مداه.

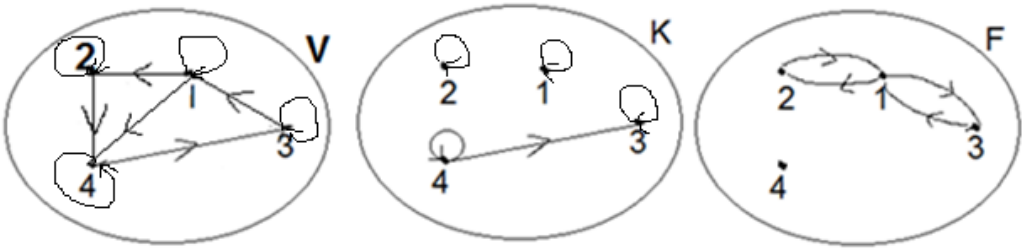
9. حدد أي من العلاقات F و K و V الممثلة بالمخططات السهمية الآتية تمثل علاقة متعدية على A={ 1 ، 2 ، 3 ، 4 } .



10. حدد أي من العلاقات F و K و V الممثلة بالمخططات السهمية الآتية تمثل علاقة تخالفيه على A={ 1 ، 2 ، 3 ، 4 }



11. حدد أي من العلاقات F و K و V الممثلة بالمخططات السهمية الآتية تمثل علاقة ترتيب على A={ 1 ، 2 ، 3 ، 4 }



12. إذا كانت A={ −1,0, 1, 2, 3 }, B={ 7, 6, 5, 4 } و كانت R علاقة معرفة من A إلى B وفق القاعدة الآتية: $a\ R\ b$ إذا و فقط إذا كان $a \in A$ و $b \in B$ و كان $a + b = 5$. أوجد ما يلي:

a. مجال العلاقة R .

b. المجال المقابل للعلاقة R .

c. قاعدة العلاقة R .

d. بيان العلاقة R .

e. مدى العلاقة R.

f. أرسم مخططا سهميا يمثل العلاقة R.

13. لتكن A={1، 2 ،7 ، 3 ، 4 } . هل العلاقات التالية المعرفة على A لها خواص الانعكاس والتماثل والتعدي والتخالف و الترتيب والتكافؤ مع بيان الأسباب.

R_1={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,4), (3,7), (7,3), (3,3), (7,7)}

R_2={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (4,4), (3,7), (7,3), (3,3), (7,7)}

R_3={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,7) ,(7,3), (7,7)}

R_4={(1,1), (1,2), (2,2), (3,4), (4,4), (3,7), (3,3), (7,7)}

14. لتكن A={0,1,2,3,4,5,6 } والعلاقة R معرفة على A حيث

$$R=\{(x,y)\in A\times A: x+y=5\}$$

هل العلاقة R لها خواص الانعكاس والتماثل والتعدي والتخالف و الترتيب والتكافؤ؟

15. لتكن A={3,5,6,7,9,10,14,18 } . والعلاقة R معرفة على A حيث

$$R=\{(x,y)\in A\times A: y=2x\}$$

هل العلاقة R لها خواص الانعكاس والتماثل والتعدي والتخالف و الترتيب والتكافؤ؟

16. لتكن B={ 4, 6, 9, 14 } و A={1,2, 3} . أثبت أن $f: A \to B$ حيث $f(x) = 5x - 1$ تمثل اقترانا من A إلى B. ثم أوجد مدى الاقتران f .

17. لتكن B={ 2, 10, 9, 24 } و A={1,2, 3} و C={1,2, 3}

D={ 2, 10, 24 }, وكانت $f: A \to B$ حيث $f(x) = 3\,x^2 - x$

و $g: C \to D$ حيث $g = \{(1,2), (2,10), (3,24)\}$. هل الاقترانان f و g متساويان ؟ أذكر السبب.

18. ليكن f اقتران معرف كما يلي : $f: A \to B$ حيث

$A = \{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 4 \}$, $B = \{ -3, -2, -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \}$. و

كان $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$. هل f اقتران تقابل؟

الوحدة الرابعة

الكسور

(4–1) تحويل الكسور العادية إلى كسور عشرية

(4–2) تحويل الكسور العشرية إلى كسور عادية

(4–3) اختبارات قابلية القسمة

(4–4) القاسم المشترك الأكبر

(4–5) طرق إيجاد القاسم المشترك الأكبر

(4–6) المضاعف المشترك الأصغر

(4–7) طرق إيجاد المضاعف المشترك الأصغر(الأدنى)

في الوحدة الثانية درسنا الأعداد النسبية وهي الأعداد التي تكتب على الصورة الكسرية $\frac{a}{b}$ حيث أن $a, b \in \boldsymbol{Z},\ b \neq 0$ و تسمى هذه الأعداد بالكسور العادية ويسمى a البسط ويسمى b المقام. بالإضافة للكسور العادية يوجد نوع أخر من الكسور وهي الكسور العشرية. في هذه الوحدة ندرس هذين النوعين من الكسور و العمليات الحسابية عليهما وطرق تحويل أحد النوعين من الكسور إلى النوع الأخر. أيضا ندرس طرق ايجاد كل من المضاعف المشترك ألأدنى و القاسم المشترك الأكبر وننهى الوحدة بدراسة بعض اختبارات قابلية القسمة.

بعد أن تعرفنا على الكسور العادية نذكر الأن تعريف الكسر العشري.

تعريف (1):

الكسور العشرية هي الأعداد الحقيقية التي تكتب على الصورة العشرية التالية

... ... أجزاء من ألف أجزاء من مئة أجزاء من عشرة . أحاد عشرات مئات ... ...

مثال (2): الأعداد الحقيقية التالية كسور عشرية

234.237	4.8	15.58	10.005

(4-1) تحويل الكسور العادية إلى كسور عشرية

يتم تحويل الكسر العادي إلى كسر عشري بقسمة بسطه على مقامه.

مثال (1): يتم تحويل الكسور العادية التالية إلى كسور عشرية كما يأتي عن طريق القسمة المطولة

1. $\frac{4}{5} = 0.8$
2. $\frac{12}{5} = 2.4$
3. $\frac{2}{3} = 0.666 = 0.\bar{6}$
4. $\frac{372}{90} = 4.1333 = 4.1\bar{3}$
5. $\frac{215}{6} = 35.8333 = 35.8\bar{3}$
6. $\frac{351}{99} = 3.545454 = 3.\overline{54}$

ملاحظة (1): عند تحويل الكسر العادي إلى كسر عشري فإن هناك حالتين:

1. قسمة البسط على المقام تنتهي و يسمى الكسر العشري الناتج عنها كسر عشري منتهي كما في أول فرعين من المثال السابق.

2. قسمة البسط على المقام لا تنتهي و يتكرر ناتج القسمة و يسمى الكسر العشري الناتج عنها كسر عشري دوري (غير منتهي) كما في الأفرع الأربعة الأخيرة من المثال السابق و لتمييز الكسر العشري المتكرر توضع قطعة مستقيمة فوق الجزء المكرر.

(4-2) تحويل الكسور العشرية إلى كسور عادية

- عند تحويل الكسر العشري إلى كسر عادي فنقوم بكتابة العدد بدون فاصلة في البسط و في المقام نكتب الواحد صحيح و نضع على يمينه أصفار بعدد الأرقام على يمين الفاصلة.

مثال (3): حول الكسور العشرية التالية إلى كسور عادية

1. $2.25 = \frac{225}{100}$

2. $45.1027 = \frac{451027}{10000}$

- عند تحويل الكسر العشري الدوري (غير منتهي) إلى كسر عادي توجد حالتان

- **الحالة الأولى:**

عندما يكون الجزء الدوري من الكسر العشري يأتي مباشرة بعد الفاصلة العشرية مثل الكسور العشرية التالية $0.\overline{6}$ و $3.\overline{54}$

نتبع الخطوات التالية:

1. نكون معادلة ونعطيها رقم (1) وذلك بفرض

$$x = \text{العدد العشري} \qquad (1)$$

2. نضرب طرفي معادلة (1) ب $(10)^k$ حيث أن k يمثل عدد الخانات على يمين الفاصلة و بذلك نكون معادلة (2)

$$(10)^k\ x = (10)^k \text{العدد العشري} \qquad (2)$$

3. نطرح معادلة (1) من معادلة (2) لنحصل على معادلة (3) والتي الطرف الأيمن منها يخلو من الاجزاء العشرية و بذلك تحذف الفاصلة ويكون العدد على الطرف الأيمن عدد صحيح.

$$[(10)^k - 1]x = \text{عدد صحيح} \qquad (3)$$

4. نقسم طرفي معادلة (3) على $[(10)^k - 1]$ معامل x و بذلك نحصل على الكسر العادي

$$x = \frac{\text{عدد صحيح}}{[(10)^k - 1]}$$

مثال (4):حول الكسور العشرية التالية إلى كسور عادية

1. $0.\overline{6}$
2. $3.\overline{54}$

الحل:

فرع (1)

$$x = 0.\overline{6} \qquad (1)$$

$$10\,x = 6.\overline{6} \qquad (2)$$

نطرح معادلة (1) من معادلة (2)

$$9\,x = 6 \qquad (3)$$

بقسمة طرفي معادلة (3) على 9 نحصل على الكسر العادي

$$x = \frac{6}{9}$$

فرع (2)

$$x = 3.\overline{54} \qquad (4)$$

$$100\,x = 354.\overline{54} \qquad (5)$$

نطرح معادلة (4) من معادلة (5)

$$99\,x = 351 \qquad (6)$$

بقسمة طرفي معادلة (6) على 99 نحصل على الكسر العادي

$$x = \frac{351}{99}$$

- **الحالة الثانية:**

عندما يكون الجزء الدوري من الكسر العشري لا يأتي مباشرة بعد الفاصلة العشرية مثل الكسور العشرية التالية $4.1\overline{3}$ و $2.41\overline{3}$

نتبع الخطوات التالية:

1. نكون معادلة ونعطيها رقم (1) وذلك بفرض

$$x = \text{العدد العشري} \qquad (7)$$

2. نضرب طرفي معادلة (7) ب $(10)^r$ حيث أن r يمثل عدد الخانات على يمين الفاصلة قبل الجزء الدوري و بذلك نكون معادلة (8) ويكون طرفها الأيمن كسر عشري الجزء الدوري فيه يأتي مباشرة بعد الفاصلة و نتبع بعد ذلك خطوات الحالة الأولى

$$(10)^r \ x = (10)^r \text{العدد العشري} \qquad (8)$$

مثال (5): حول الكسور العشرية التالية إلى كسور عادية

1. $4.1\overline{3}$
2. $2.41\overline{3}$

الحل:

فرع (1)

$$x = 4.1\overline{3} \qquad (9)$$

$$10\,x = 41.\overline{3} \qquad (10)$$

$$100\,x = 413.\overline{3} \qquad (11)$$

طرح معادلة (10) من معادلة (11)

$$90\,x = 372 \qquad (12)$$

بقسمة طرفي معادلة (12) على 90 نحصل على الكسر العادي

$$x = \frac{372}{90}$$

فرع (2)

$$x = 2.41\overline{3} \qquad (13)$$

(14) $100\,x = 241.\overline{3}$

(15) $1000\,x = 2413.\overline{3}$

نطرح معادلة (14) من معادلة (15)

(16) $900\,x = 2172$

بقسمة طرفي معادلة (16) على 900 نحصل على الكسر العادي

$$x = \frac{2172}{900}$$

في الوحدة الثانية درسنا انه عند جمع و طرح الكسور العادية (الأعداد النسبية) غير المتجانسة نحولها أولا إلى كسور عادية متجانسة و ذلك بضرب بسط ومقام كل كسر عادي بمقام الكسر الأخر وبذلك نحصل على عددين كسريين عاديين متجانسين.

توجد طرق وأساليب أخرى لتحويل الكسور العادية غير المتجانسة إلى متجانسة وذلك بإيجاد أصغر عدد صحيح يقبل القسمة على مقامي الكسريين العاديين غير المتجانسين ونجعل هذا العدد المقام الجديد لكل عدد كسري عادي منهما ثم نوجد البسط الجديد لكل من العددين الكسريين بضرب ناتج قسمة المقام الجديد على المقام السابق بالبسط السابق. لتوضيح هذه العملية نذكر المثال التالي.

مثال(6) : أوجد ناتج العملية الحسابية التالية:

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{6} =$$

بما أن العدد 18 هو أصغر عدد يقبل القسمة على المقامين 9، 6 فسنحول الكسرين العاديين غير المتجانسين في المثال إلى كسرين عاديين متجانسين مقامهما المشترك 18 وهما كما يلي

$$\frac{4}{9} = \frac{8}{18}, \quad \frac{5}{6} = \frac{15}{18}$$

وبذلك تصبح المسالة الحسابية التالية

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{6} = \frac{8}{18} + \frac{15}{18} = \frac{8+15}{18} = \frac{23}{18}$$

في المثال السابق 18 يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين 6 و 9 وكان من السهل ايجاده لأن مقامي العددين الكسريين صغيرين ولكن عندما يكونان كبيرين فإنه يجب علينا استخدام طرق تعتمد على معرفة اختبارات قابلية قسمة الأعداد الصحيحة على بعضها. في الجزء المتبقي من هذه الوحدة سندرس اهم اختبارات القسمة والتي ستساعدنا في ايجاد كل من القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين.

(4-3) اختبارات قابلية القسمة

نقدم الآن بعض أهم اختبارات القسمة التي من خلالها نحدد من الأعداد الصحيحة التي يمكن لعدد صحيح أن يقبل القسمة عليها مما يساعدنا في تحليل العدد إلى عوامله الاولية والتي نحتاجها لإيجاد كل من القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين.

سندرس اختبارات قابلية القسمة على الأعداد 2، 3، 4، 5، 8، 9 و 11.

- **القسمة على 2**

يقبل العدد n القسمة على 2 إذا كان الرقم في خانة الأحاد يقبل القسمة على 2.
بمعنى أن الرقم في خانة الأحاد يكون أحد الأرقام التالية $8, 6, 4, 2, 0$.

مثال(7) : الأعداد التالية تقبل القسمة على 2

1. $n = 134258$
2. $n = 72032142$
3. $n = 57430$

- **القسمة على 3**

يقبل العدد n القسمة على 3 إذا كان مجموع الأرقام في خانات العدد يقبل القسمة على3.

مثال(8) : الأعداد التالية تقبل القسمة على 3

1. $n = 784857$
2. $n = 4071384$

- **القسمة على 4**

يقبل العدد n القسمة على 4 إذا كان العدد المتكون من خانتي الأحاد و العشرات يقبل القسمة على 4.

مثال(9) : الأعداد التالية تقبل القسمة على 4

1. $n = 3084$
2. $n = 187964216$

- **القسمة على 5**

يقبل العدد n القسمة على 5 إذا كان الرقم في خانة الأحاد 0 أو 5.

مثال(10) : الأعداد التالية تقبل القسمة على 5

1. $n = 23570$
2. $n = 23175$

- **القسمة على 8**

يقبل العدد n القسمة على 8 إذا كان العدد المتكون من أول ثلاث خانات الأحاد و العشرات والمئات يقبل القسمة على 8.

مثال(11) :الأعداد التالية تقبل القسمة على 8

1. $n = 718490128$
2. $n = 872549352$

- **القسمة على 9**

يقبل العدد n القسمة على 9 إذا كان مجموع الأرقام التي يتكون منها يقبل القسمة على 9.

مثال(12) :

الأعداد التالية تقبل القسمة على 9

1. $n = 153$
2. $n = 4372812$

- **القسمة على 11**

إذا كان العدد n يكتب على الصورة

$$n = a_r\ a_{r-1}\ a_{r-2} \dots \dots a_2\ a_1\ a_0$$

فإنه يقبل القسمة على 11 إذا كان العدد الناتج من العملية التالية يقبل القسمة على 11

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \dots + (-1)^r a_r$$

مثال(13) : الأعداد التالية تقبل القسمة على 11

1. $n = 165$
2. $n = 49918$
3. $n = 5046712$

(4-4) القاسم المشترك الأكبر

نتناول الأن مفهوم القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين و نعرض طريقتين لإيجاده.
لذلك سنحتاج بعض المفاهيم الاساسية التي سنعرضها مثل القاسم، الباقي، العدد الأولي و العدد المؤلف.

تعريف (2): إذا كان $m,n \in Z$ فإن m يقسم n و يرمز له بالرمز $m|n$ إذا وجد عدد صحيح $k \in Z$ بحيث أن $n = m \cdot k$.
في هذه الحالة نقول أن m قاسم من قواسم n و كذلك نقول بأن n يقبل القسمة على m.

ملاحظة (2): إذا كان m قاسم للعدد n فإن $(-m)$ قاسم للعدد n لأن

$$n = mk = (-m)(-k)$$

مثال (14): أوجد كل قواسم العدد 35.

الحل:

بالتجربة فإن قواسم العدد 35 هي

$$\pm 1, \quad \pm 5, \quad \pm 7, \quad \pm 35$$

مثال(15): أوجد القواسم الموجبة للعدد 56.

الحل:

القواسم الموجبة للعدد 56 هي

1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56

تعريف (3): m لا يقسم n إذا وجد عددين صحيحين $k, l \in Z$ بحيث أن

$$n = m \cdot k + l, \quad 1 \leq l < m$$

.

مثال(16): العدد 7 لا يقسم العدد 25 لان

$25=(7)(3)+4$

تعريف (4): ليكن n عدد طبيعي

1. **نسمى n عدداً أولي إذا كان $n > 1$ و لا يقبل القسمة إلا على نفسه و على 1.**
2. **نسمى n عدد مؤلف إذا كان $n > 1$ و لم يكن عدداً أوليا.**

n عدد مؤلف إذا و فقط إذا أمكن تحليله على الشكل

$$n = m \cdot k$$

مثال(17):

1. الأعداد الطبيعية التالية أعداد أولية

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$

2. الأعداد الطبيعية التالية أعداد مؤلفة

4, 6, 10, 21, 39, 64

فيما يلي نذكر بعض النظريات التي توضح بعض الجوانب الخاصة بالأعداد الأولية

نظرية (1): يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.

نظرية (2): كل عدد طبيعي أكبر من 1 يقبل القسمة على عدد أولي.

نظرية (3): إذا كان n عدداً مؤلفا فإن n يقبل القسمة على عدد أولي لا يزيد عن $\sqrt{n}$.

مثال(18) : أوجد أعداد أولية تقبل الأعداد المؤلفة التالية القسمة عليها

48, 15, 27, 45, 62

الحل:

1. العدد 62 يقبل القسمة على الأعداد الأولية 2 ، 31.
2. العدد 45 يقبل القسمة على الأعداد الأولية 3 ، 5.
3. العدد 27 يقبل القسمة على العدد الأولي 3.
4. العدد 15 يقبل القسمة على الأعداد الأولية 3 ، 5.
5. العدد 48 يقبل القسمة على الأعداد الأولية 2 ، 3.

تعريف (5): يسمى العدد k قاسم مشترك لمجموعة من الأعداد إذا كان k يقسمها جميعا.

مثال(19) : أوجد القواسم المشتركة للعددين $12,\ 18$.

الحل:

القواسم المشتركة للعددين $12,\ 18$ هي $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

تعريف (6): ليكن $m,\ n$ عددين صحيحين و أحدهما على الأقل لا يساوي الصفر فإن k يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين $m,\ n$ و نكتب

$$k = (m,n) \text{ ق. م. أ.}$$

إذا تحقق الشرطان التاليان

1. $k|n$ و $k|m$.
2. إذا كان $c|n$ و $c|m$ (أي أن c قاسم مشترك للعددين $m,\ n$) فإن $c \leq k$.

مثال(20) : أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين

1. $35,\ 42$.
2. $24,\ -36$.

الحل:

1. $(42,35) = 7$ ق. م. أ.
2. $(-36,24) = 12$ ق. م. أ.

من تعريف القاسم المشترك الأكبر نلاحظ أنه لا يعتمد على اشارة العددين اللذين نوجد لهما القاسم المشترك الأكبر و هذا ما توضحه الملاحظة التالية.

ملاحظة (3): ليكن $m,\ n$ عددين صحيحين و أحدهما على الأقل لا يساوي الصفر فإن

1. (m,n) ق. م. أ. $= (-m,n)$ ق. م. أ. $= (m,-n)$ ق. م. أ. $= (-m,-n)$.
2. (m,n) ق. م. أ. عدد صحيح موجب.

مثال(21) :

ق. م. أ.$(18, 12)$ = ق. م. أ.$(-18, 12)$ = ق. م. أ.$(18, -12)$ =

ق. م. أ.$(-18, -12)$ = 6.

(4-5) طرق إيجاد القاسم المشترك الأكبر

توجد طريقتان أساسيتان لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين ونعرض الآن هاتين الطريقتين.

- **الطريقة الأولى:(تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية)**

و يتم إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين من خلال الخطوات التالية:

1. تحليل كل عدد من العددين المراد إيجاد القاسم المشترك الأكبر لهما إلى عوامله الأولية.
2. نأخذ العوامل الأولية المشتركة في العددين وإذا تكرر أحد العوامل في العددين فإننا نكرر العدد الأولى بعدد أقل تكرار له في العددين.
3. نضرب العوامل الأولية معا فنحصل على القاسم المشترك الأكبر.

ملاحظة (4): إذا لم توجد عوامل أولية مشتركة بين العددين فإن ق. م. أ. للعددين يساوي 1.

مثال(22) : أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين $18, 12$.

الحل:

$$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$$
$$18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$$

العوامل الأولية المشتركة هي $2, 3$.

ق. م. أ. $(18,12) = 2 \cdot 3 = 6$

مثال(23) : أوجد ق. م. أ. $(72,48)$.

الحل:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

ق. م. أ. $(72,48) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

- **الطريقة الثانية:(استخدام خوارزمية اقليدس)**

هذه الطريقة تكون مفيدة في حالة إيجاد القاسم المشترك الأكبر لأعداد كبيرة لان تحليل الأعداد الكبيرة إلى عواملها الأولية يأخذ مجهود و وقت طويل وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

1. نقسم العدد الأكبر على العدد الأصغر و نحسب باقي القسمة.
2. نقسم العدد المقسوم عليه على باقي القسمة في الخطوة الأولى.
3. نكرر عملية قسمة العدد المقسوم عليه على باقي القسمة من الخطوة التي تسبقها حتى نحصل على باقي صفر.
4. يكون القاسم المشترك الأكبر هو أخر باقي قبل الصفر في عملية القسمة الأخيرة.

مثال(24) : أوجد ق. م. أ. (72,48).

الحل:

$$\begin{aligned} 72 &= 48 \cdot 1 + 24 \\ 48 &= 24 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

ق. م. أ. $(72 , 48) = 24$

مثال(25) : أوجد ق. م. أ. $(1337, 501)$.

الحل:

$$\begin{aligned} 1337 &= 501 \cdot 2 + 335 \\ 501 &= 335 \cdot 1 + 166 \\ 335 &= 166 \cdot 2 + 3 \\ 166 &= 3 \cdot 55 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

ق. م. أ. $(1337, 501) = 1$

(4–6) المضاعف المشترك الأصغر(الأدنى)

نتناول الآن مفهوم المضاعف المشترك الأصغر(الأدنى) لعددين صحيحين ثم نعرض طريقتين لإيجاده.

تعريف (7): يسمى العدد d مضاعف مشترك لمجموعة من الأعداد إذا كان d يقبل القسمة عليها جميعا.

مثال(26) :

1. العدد 12 مضاعف مشترك للأعداد $2,\ 3, 4, 6, 12$
2. الأعداد 30 و 20 مضاعفات مشتركة للأعداد $2,\ 5,\ 10,$

تعريف (8): ليكن $m,\ n$ عددين صحيحين و كلاهما لا يساوي الصفر فإن العدد الصحيح الموجب d يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين $m,\ n$ و نكتب

$$d = (m\ ,\ n)\ \text{م. م. أ.}$$

إذا تحقق الشرطان التاليان:

1. **d مضاعف مشترك للعددين $m,\ n$.**
2. **لكل مضاعف مشترك c للعددين $m,\ n$ يكون $d \leq c$.**

كما في حالة القاسم المشترك الأكبر من تعريف المضاعف المشترك الأصغر نلاحظ أنه لا يعتمد على اشارة العددين اللذين نوجد لهما القاسم المشترك الأكبر و هذا ما توضحه الملاحظة التالية.

ملاحظة (5):

(m,n) م. م. أ. $= (-m,n)$ م. م. أ. $= (m,-n)$ م. م. أ. $= (-m,-n)$

مثال(29) :

1. $12 = (3,4)$ م. م. أ.
2. $18 = (6,9)$ م. م. أ.

نظرية (4): إذا كان $m, \neq 0,\ n \neq 0$ فإن

$$|mn| = (m,n)\ \text{م. م. أ.} \cdot (m,n)\ \text{ق. م. أ.}$$

(4-7) طرق إيجاد المضاعف المشترك الأصغر(الأدنى)

توجد طريقتان أساسيتان لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر (الأدنى) لعددين صحيحين ونعرض الآن لهما.

- **الطريقة الأولى: (تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية)**

و يتم إيجاد المضاعف المشترك الأصغر من خلال الخطوات التالية:

1. تحليل كل عدد من العددين المراد إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لهما إلى عوامله الأولية.
2. نأخذ العوامل الأولية المشتركة في العددين و إذا تكرر أحد العوامل في العددين فإننا نكرر العدد الأولى بعدد أكبر تكرار له في العددين.
3. نضرب العوامل الأولية المشتركة في العددين بأكبر تكرار في العوامل الأولية غير المشتركة لكل منها فنحصل على المضاعف المشترك الأصغر.

ملاحظة (6): إذا لم توجد عوامل أولية مشتركة بين العددين فإن م. م. أ. للعددين يساوي حاصل ضربهما.

مثال(30) : أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12 و 18.

الحل:

$$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$$
$$18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$$

العوامل الأولية المشتركة هي 2 و أكبر تكرار له مرتين و 3 و أكبر تكرار له مرتين

ق. م. أ. $(18,12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

مثال(31) : أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 24 و 36.

الحل:

$$24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$36 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

العوامل الأولية المشتركة هي 2 و أكبر تكرار له ثلاث مرات و 3 و أكبر تكرار له مرتين

م. م. أ. $(24, 36) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$

- **الطريقة الثانية: (باستخدام نظرية 4)**

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون العددان المراد ايجاد مضاعفهما المشترك الاصغر كبير و تحليلهما يحتاج لوقت فيتم استخدام خوارزمية القسمة أولا لإيجاد القاسم المشترك الأكبر ثم بعد ذلك نوجد المضاعف المشترك الأصغر باستخدام نظرية 4.

مثال(32) :أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 48 و 72.

الحل: من مثال(24) ق. م. أ. $(72,48) = 24$

م. م. أ. $(72,48) = \frac{(72)(48)}{24} = 144.$

تمارين على الوحدة الرابعة

1. حول الكسور العادية التالية إلى كسور عشرية

$a)\ \frac{25}{6}$ $b)\ \frac{823}{9}$ $c)\ \frac{48}{5}$ $d)\ \frac{966}{24}$

2. حول الكسور العشرية التالية إلى كسور عادية

$a)\ 25.025$ $b)\ -24.12$ $c)\ 30.\overline{5}$ $d)14.2\overline{4}$

3. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين

أ. 214 و 1212

ب. 75 و 225

ت. 468 – و 3764

ث. 120 و 480

ج. 674 و 7456

4. أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين

أ. 214 و 1212

ب. 75 و 225

ت. 468 – و 3764

ث. 234 و 764

5. حدد أي من الأعداد التالية يقبل القسمة على

2 و 3 و 4 و 5 و 8 و 9 و 11

$a)11254$ $b)\ 132579$ $c)1320$ $d)\ 31680$

الوحدة الخامسة

كثيرات الحدود والعمليات عليها

(5–1) قوانين الأسس

(5–2) الأسس الكسرية (الجذور)

(5–3) جمع كثيرات الحدود

(5–4) طرح كثيرات الحدود

(5–5) ضرب كثيرات الحدود

(5–6) قسمة كثيرات الحدود

من أشهر الاقترانات المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية اقتران كثيرة الحدود في متغير واحد. وسبق أن درسنا حالتين خاصتين من كثيرة الحدود في الوحدة الثالثة و هما الاقتران الخطي و الاقتران التربيعي. وفي هذه الوحدة نتناول اقتران كثيرة الحدود بشكل أكثر تفصيلا و سندرس المفاهيم الأساسية المرتبطة به مثل المعامل الرئيسي، الحد الثابت، درجة كثيرة الحدود ومفاهيم و مصطلحات أخرى. بالإضافة لذلك فإن العمليات التي نجريها علي كثيرات الحدود وهي الجمع، الطرح، الضرب و القسمة سنركز على دراستها و سنوضح كيفية اجرائها و أهم خصائص هذه العمليات.

في بداية هذه الوحدة سوف ندرس الأسس و الجذور و قوانينها لأهميتها لدراسة كثيرات الحدود و خاصة عمليتي الضرب و القسمة.

(5-1) قوانين الأسس

في البداية نتعرف على المقصود بالعدد الأسي

تعريف (1): إذا كان a عدد حقيقي لا يساوي الصفر و m عدد صحيح موجب فإن a^m يسمى عدد أسي أساسه a و أسه m.

مثال (1):

1. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

2. $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

نذكر الان أهم قوانين الأسس التي تستخدم في العديد من المسائل الحسابية و في موضوعات سندرسها في الوحدة السادسة.

1. عند ضرب عددين أو أكثر ذي أساسات متساوية فإن الناتج يكون نفس الأساس مرفوع له مجموع الأسس :

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

2. عند قسمة عددين أو أكثر ذي أساسات متساوية فإن الناتج يكون نفس الأساس مرفوعاً له حاصل طرح الأسس :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

3. إذا كان هناك عدد مرفوع لأس والكل مرفوع لأس آخر فإن الناتج يكون نفس العدد مرفوع له حاصل ضرب الأسين :

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

4. إذا كان هنالك عددان أو أكثر ذي أساسات غير متساوية و أسس متساوية فإن ناتج حاصل ضربهما يكون عدداً أساسه حاصل ضرب الأساسين مرفوعاً لنفس الأس:

$$a^n b^n = (ab)^n.$$

5. إذا كان رفع عدد أسي لأس جديد فإن الناتج يكون عدداً أسياً له نفس الأساس و أسه يكون حاصل ضرب الأسين:

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

6. مقلوب أي عدداً أسياً يكون عدد أسي له نفس الأساس و أسه يكون المعكوس الجمعي للأس الأصلي:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

7. إذا كان الأس في أي عدد يساوي 0 وأساسه لا يساوي 0 فإن قيمة هذا العدد تساوي:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0.$$

8. إذا كان الأساس صفرا و الأس صفراً، 0^0 ، تكون القيمة غير معرفة.

في جدول (5−1) التالي نلخص أهم قوانين الأسس مع التمثيل لكل قانون إذا كان a ، b عددين حقيقيين لا يساويان الصفر و m ، n عددين صحيحين موجبين فإنه يتحقق التالي:

م.	القانون	مثال
1	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^3 \cdot a^5 = a^8$
2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{a^6}{a^4} = a^2$
3	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(ab)^3 = a^3 \cdot b^3$
4	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(a^3)^5 = a^{15}$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$
6	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\frac{1}{a^7} = a^{-7}$

جدول (5−1): قوانين الأسس

ملاحظة (1): $(a \pm b)^m \neq a^m \pm b^m$

مثال(2): بسط كل من المقادير التالية باستخدام قوانين الأسس

1. $(3 \cdot 2)^4$
2. $\frac{2^4 \cdot 3^5}{2^5 \cdot 3^7}$
3. $\frac{5^4 \cdot 4^3}{(125) \cdot 8^2}$
4. $\frac{6^2 \cdot (10)^4}{(15)^2 \cdot 32}$

الحل:

1. $(3 \cdot 2)^4 = 3^4 \cdot 2^4$
2. $\frac{2^4 \cdot 3^5}{2^5 \cdot 3^7} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3^2}$
3. $\frac{5^4 \cdot 4^3}{(125) \cdot 8^2} = \frac{5^4 \cdot 2^6}{5^3 \cdot 2^6} = 5$
4. $\frac{6^2 \cdot (10)^4}{(15)^2 \cdot 32} = \frac{(2 \cdot 3)^2 \cdot (2 \cdot 5)^4}{(3 \cdot 5)^2 \cdot 2^5} = \frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^5} = 2 \cdot 5^2$

(5-2) الأسس الكسرية (الجذور)

درسنا فيما سبق الأعداد الأسية وكانت الأسس أعداد صحيحة و الأن ننتقل لدراستها في حالة أن الأسس أعداد كسرية و تسمي في هذه الحالة الجذور.

تعريف(2) إذا كان a عدداً نسبياً موجباً و m, n عددين صحيحين فإن

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

ملاحظة (2):

1. إذا كانت $m = 1$ فإن $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ يسمى الجذر النوني للعدد a.
2. إذا كانت $n = 2$ فإننا نكتب $\sqrt{a}$ بدل من $\sqrt[2]{a}$.
3. إذا كان a^m عدداً نسبياً سالباً و n عدداً صحيحاً زوجياً موجباً فإن $\sqrt[n]{a^m}$ غير معرف.

مثال (3): $\sqrt[4]{-81}$ غير معرف بينما $\sqrt[3]{-81}$ معرف.

- **خواص الجذور**

تمتاز الجذور بالخواص التالية

1. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}$
2. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

مثال (4): بسط كلاً من المقادير التالية:

1. $\sqrt[3]{16}$
2. $\sqrt{72}$
3. $\sqrt[3]{125}$
4. $\sqrt{\frac{49}{100}}$
5. $(0.125)^{-\frac{1}{3}}$
6. $\sqrt[3]{-64} \cdot 6$

الحل:

1. $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$
2. $\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3^2} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 3$
3. $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 1$
4. $\sqrt{\frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{7^2}{10^2}} = \frac{7}{10}$
5. $(0.125)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{5^3}{10^3}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{5}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
6. $\sqrt[3]{-64} \cdot 6 = \sqrt[3]{-2^6} \cdot 6 = -(2^2) \cdot 3 \cdot 2 = -(2^2) \cdot 3$

(3-5) كثيرات الحدود

نتناول الآن موضوع كثيرات الحدود ونبدأ بذكر تعريفها

تعريف (3): كثيرة الحدود هو تركيب جبري يتكون من جمع عدد منته من الحدود، يتم بناؤه باستخدام عمليات الجمع والضرب والأسس الصحيحة غير السالبة لمتغير معين و يكون الشكل العام لكثيرات الحدود للمتغير x هو:

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

حيث إن n عدد صحيح موجب و $a_n \neq 0$ و تكون كل من $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ أعداداً حقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود. و بشكل خاص يطلق على a_n اسم المعامل الرئيسي و a_0 اسم الحد الثابت. و تمثل n درجة كثيرة الحدود.

ملاحظة (3):

1. إذا كانت $n = 0$ فإننا نحصل على كثيرة حدود من الدرجة صفر و هو عدد ثابت و تسمى $f(x) = a_0$ كثيرة حدود ثابتة.

2. إذا كانت $n = 1$ فإننا نحصل على كثيرة حدود من الدرجة الأولى و تسمى $f(x) = a_1\, x + a_0$ كثيرة حدود خطية.

تعريف (4): نقول عن كثيرتي الحدود $f(x)$ و $g(x)$ أنهما متساويان و نكتب

$f(x) = g(x)$ إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1. **كثيرتا الحدود $f(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الدرجة.**
2. **تتساوى المعاملات المتناظرة في كل من كثيرتي الحدود $f(x)$ و $g(x)$.**

مثال (5): في جدول (5−2) نعرض أمثلة لكثيرات حدود مختلفة ونحدد درجتها، المعامل الرئيسي واسم كثيرة الحدود.

كثيرة الحدود	درجتها	المعامل الرئيسي	اسمها
$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2x - 1$	الرابعة	2	كثيرة حدود من الدرجة الرابعة
$f(x) = 2 - 3x^3 + 5x^2 + 2x$	الثالثة	-3	كثيرة حدود تكعيبية
$f(x) = x^2 + 2x - 1$	الثانية	1	كثيرة حدود تربيعية
$f(x) = 9 - 5x$	الأولى	-5	كثيرة حدود خطية
$f(x) = 12$	صفر	12	كثيرة حدود ثابتة

جدول (5−2): أمثلة لكثيرات الحدود

مثال (6):

1. تعتبر $h(x) = x^2 - \frac{x}{4} + 2$ كثيرة حدود تربيعية.
2. $g(x) = 7x^{\frac{3}{2}} - 5$ لا تعتبر كثيرة حدود لأن الحد الأول في $g(x)$ يحتوي على أُس $\frac{3}{2}$ و هو ليس بعدد طبيعي.
3. $f(x) = x^2 - \frac{4}{x} + 1$ لا تعتبر كثيرة حدود لأن الحد الثاني في $f(x)$ يتضمن قسمة على المتغير x وهو يعنى الأس يساوي -1 و هو ليس بعدد طبيعي.

مثال (7): إذا كانت $g(x) = f(x)$ و كانت

$$g(x) = ax^3 + (b-1)x^2 + 2 \quad \text{و} \quad f(x) = -5x^3 + 2x^2 + 2$$

أوجد قيمة كل من a و b .

الحل: نساوي المعاملات المتناظرة في كثيرتي الحدود فنحصل على المعدلات التالية:

$$a = -5, \quad b - 1 = 2$$

ومن ذلك نستنتج أن $a = -5$ و $b = 3$.

(4-5) جمع كثيرات الحدود

عند جمع كثيرتي حدود معا نجمع معاملات الحدود المتناظرة، فتنتج كثيرة حدود جديدة.

فإذا كان لدينا كثيرتي الحدود التاليتين :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_1 x + a_0$$

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

حيث $n > m$ ، فإن

$$h(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0 ,$$

$$c_i = a_i + b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$c_i = a_i, \qquad i = (m+1), (m+2), \dots, n.$$

ملاحظة (4):

1. درجة مجموع كثيرتي الحدود أقل أو يساوي أعلى درجة من درجتي كثيرتي الحدود.
2. درجة مجموع كثيرتي الحدود تكون أقل من أعلى درجة في حالة أن درجتي كثيرتي الحدود متساويتين و المعامل الرئيسي في إحداهما يكون المعكوس الجمعي للمعامل الرئيسي في الأخرى.

مثال (8): إذا كانت $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x$، $g(x) = -x^3 + 8x^2 + 7$ و $h(x) = 3x^3 + 4x^2 + 9x - 5$. أوجد كل من $(f+g)(x)$ و $(f+h)(x)$ و درجتيهما.

الحل:

$$\begin{aligned}(f+h)(x) &= f(x) + h(x)\\ &= (1+3)x^3 + (-5+4)x^2 + (2+9)x + (0+(-5))\\ &= 4x^3 - x^2 + 11x - 5\end{aligned}$$

درجة $(f+h)(x)$ تساوي 3.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= \big(1+(-1)\big)x^3 + (-5+8)x^2 + (2+0)x + (0+7)\\ &= 3x^2 + 2x + 7\end{aligned}$$

درجة $(f+g)(x)$ تساوي 2.

(5-5) طرح كثيرات الحدود

عند طرح كثيرتي حدود معا نطرح معاملات الحدود المتناظرة، فتنتج كثيرة حدود جديدة.

فإذا كان لدينا كثيرتي الحدود التاليتين :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_1 x + a_0$$

و كانت $m < n$ فإن

$$k(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

حيث

$$k(x) = d_n\, x^n + d_{n-1}\, x^{n-1} + d_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots + d_1 x + d_0\,,$$

$$d_i = a_i - b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$d_i = a_i, \qquad i = (m+1), (m+2), \ldots, n.$$

ملاحظة (5):

1. درجة طرح كثيرتي الحدود أقل أو يساوي أعلى درجة من درجتي كثيرتي الحدود.
2. درجة طرح كثيرتي الحدود تكون أقل من أعلى درجة في حالة أن درجتي كثيرتي الحدود متساويتان و المعاملان الرئيسيان فيهما يكونان متساويين.

مثال (9): إذا كانت $f(x) = \sqrt{3}\, x^3 + 8\, x^2 - 2x$،

$g(x) = \sqrt{3}\, x^3 + 5x^2 + 7$ و $h(x) = 3x^3 + 4x^2 + 9x - 5$.

أوجد كلاّ من $(f - g)(x)$ و $(f - h)(x)$ و درجتيهما.

الحل:

$$(f-h)(x) = f(x) - h(x)$$
$$= (\sqrt{3}-3)x^3 + (8-4)x^2 + (-2-9)x + (0-(-5))$$
$$= (\sqrt{3}-3)x^3 + 4x^2 - 11x + 5$$

درجة $(f-h)(x)$ تساوي 3.

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= (\sqrt{3}-\sqrt{3})x^3 + (8-5)x^2 + (-2-0)x + (0-7)$$
$$= 3x^2 - 2x - 7$$

درجة $(f+g)(x)$ تساوي 2.

(5-6) ضرب كثيرات الحدود

الآن يمكننا إيجاد حاصل الضرب

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

و ذلك بضرب كل حد من حدود كثيرة الحدود $f(x)$ في $g(x)$ ثم نجمع الحدود ذات الأسس المتساوية.

في حالة ضرب كثيرة الحدود $f(x)$ بعدد $c \neq 0$ فإننا نضرب كل حد من حدود كثيرة الحدود بالعدد c وينتج كثيرة حدود من نفس الدرجة و لكن معاملاته ناتجة عن ضرب معاملات كثيرة الحدود $f(x)$ المناظرة لها بالعدد c و يكتب $(cf)(x)$.

مثال (10): إذا كانت $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5$ و كانت $g(x) = 3x^2 + 1$.

أوجد حاصل الضرب $(fg)(x)$ ودرجته.

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (2x^3 + x^2 - 5)(3x^2 + 1) \\ &= 6x^5 + 2x^3 + 3x^4 + x^2 - 15x^2 - 5 \\ &= 6x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 5\end{aligned}$$

درجة $(fg)(x)$ تساوي 5.

ملاحظة (6): درجة ضرب اقترانين كثيري حدود = مجموع درجتي الاقترانين.

(5-7) خواص عمليات جمع، طرح و ضرب كثيرات الحدود

تتميز عمليات جمع، طرح و ضرب كثيرات الحدود بعدد من الخواص و التي نعرضها كالتالي:

1. **الخاصية التبديلية:** جمع وضرب كثيرات الحدود عمليات ابدالية، لأي كثيرتي حدود :

لأي كثيرتي حدود $f(x)$ و $g(x)$ يتحقق

$$(f + g)(x) = (g + f)(x)$$

$$(fg)(x) = (gf)(x)$$

2. **الخاصية التجميعية** : جمع و ضرب كثيرات الحدود عمليتان تجميعيان، لأي كثيرات حدود $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ يتحقق

$$f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$$

$$f(x)[g(x)h(x)] = [f(x)g(x)]h(x)$$

3. **الضرب توزيعي على الجمع و الطرح:** لأي كثيرات حدود $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ يتحقق :

$$h(x)[f(x) \pm g(x)] = h(x)f(x) \pm h(x)g(x)$$

ملاحظة (7): طرح كثيرات الحدود ليست عملية ابدالية ولا تجميعية،

$$.(f - g)(x) \neq (g - f)(x)$$

$$f(x) - [g(x) - h(x)] \neq [f(x) - g(x)] - h(x)$$

(5-8) قسمة كثيرات الحدود

ليكن $f(x)$ و$g(x)$ كثيرتي حدود حيث $g(x) \neq 0$ و درجة كثير الحدود $f(x)$ أكبر أو تساوي درجة كثير الحدود $g(x)$ فإنه ينتج عن قسمة $f(x)$ على $g(x)$ كثيرتي حدود $h(x)$ و $r(x)$ حيث

$$f(x) = g(x)\,h(x) + r(x)$$

و كل من $h(x)$ و $r(x)$ يتعينان بشكل وحيد. و درجة كثيرة الحدود $r(x)$ أصغر من درجة كثيرة الحدود $g(x)$. و نسمي كثيرة الحدود $f(x)$ بالمقسوم و كثيرة الحدود$g(x)$ بالقاسم (أو المقسوم عليه) و كثيرة الحدود $h(x)$ بخارج القسمة و كثيرة الحدود $r(x)$ بباقي القسمة .

- **طريقة القسمة المطولة (الطويلة)**

سنتعرف فيما يلي على طريقة القسمة المطولة لإيجاد خارج وباقي قسمة كثيرات الحدود، و المثال التالي يوضح خطوات هذه الطريقة.

مثال(11): أوجد خارج و باقي قسمة $f(x) = 3x^3 - 7\,x^2 + 1$ على

$g(x) = x - 2$.

الحل:

1. نرتب حدود كثيرتي الحدود $f\,(x)$ و $g(x)$ تنازليا حسب قوى x.
2. نقسم الحد الأول في المقسومَ على الحد الأول في المقسوم عليه ونضعه حدا أول في خارج القسمة.
3. نضرب المقسوم عليه بما حصلنا عليه في الخطوة 2 ونطرح الناتج.
4. نكرر الخطوتين 2، 3 حتى نحصلَ على باق درجته أقل من درجة المقسوم عليه.

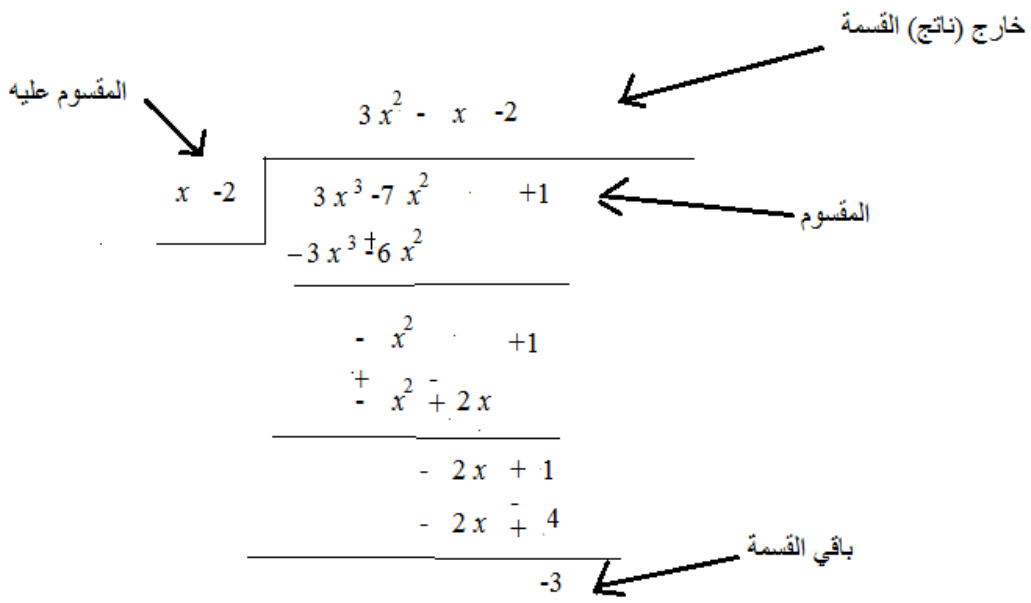
إن خارج قسمة $f(x)$ على $g(x)$ هو $h(x)= 3x^2-x-2$ بينما باقي القسمة هو $r(x)=-3$ وللتحقق من صحة ذلك نجد

$$(3x^2-x-2)(x-2)-3 = 3x^3-7x^2+1$$

أي أن

خارج القسمة × المقسوم عليه + الباقي = المقسوم

وهذه هي القاعدة نفْسها في قسمة الأعداد الطبيعية.



شكل (5-1): مثال على طريقة القسمة المطولة(الطويلة)

ملاحظة (8):

1. درجة المقسوم = درجة المقسوم عليه + درجة ناتج القسمة.
2. درجةَ الباقي أقَل من درجة المقسوم عليه.

النظرية التالية تسمى نظرية الباقي وهي تساعدنا على ايجاد باقي القسمة مباشرة عندما تكون درجة المقسوم عليه تساوى 1 بدون اجراء عملية القسمة المطولة.

نظرية(1): (نظرية الباقي) إذا قسمنا $f(x)$ على $g(x) = x-a$ فإن الباقي يساوي $f(a)$.

مثال (12): أوجد باقي قسمة $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 1$ على $g(x) = x - 2$ بطريقتين.

الحل:

1. من مثال (11) بالقسمة المطولة وجدنا أن باقي القسمة هو -3
2. باستخدام نظرية الباقي باقي القسمة $= f(2)$

$$f(2) = 3(2)^3 - 7(2)^2 + 1 = -3$$

تمارين على الوحدة الخامسة

1. ميز كثيرة الحدود في العبارات الجبرية الآتية واذكر درجتها :

a. $f(x)= 3x^5-x^4+3/2$.

b. $g(t)=t^2+6t^{-1}+7$.

c. $h(t)= \sqrt{3}$.

d. $k(x)=5x+\sqrt{x}$

2. ليكن لدينا كثيرتي الحدود

$$f\ (x) = 2x^2 - 5x + 5$$

$$g\ (x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5.$$

أوجد:

a. مجموعَ الاقترانين $f(x)$، $g(x)$ ثم قارن درجةَ المجموعِ بدرجة كل واحد منهما.

b. $(f - g)(x)$ ثم قارن درجةَ المجموعِ بدرجة كل واحد منهما.

c. حاصلَ ضربِ الاقترانينِ $f(x)$، $g(x)$ ثم قارن درجةَ المجموعِ بدرجة كل واحد منهما.

d. $(5\ f)\ (x)$ ثم قارن درجةَ حاصل الضرب بدرجة $f(x)$.

3. أذكر الحدود و المعاملات و الدرجة و المعامل الرئيسي لكل من كثيرات الحدود الآتية:

(i $f(x)= 3x^5-x^4+3/2$ (ii $h(t)= \sqrt{2}$.

(iii $g(x)= 2x^4+3x^3+ 4x^2+5$ (iv $k(t)= x^3-1$.

4. إذا كانت $g(x)= f(x)$ و كانت $f(x) = (a+3)x^3 + (3b-1)x^2 + 2$

و $g(x)= (b-2)x^3 + (a+3)x^2 + c$ أوجد قيمة كل من a و b و c .

5. وضح باستخدام أمثلة أن عملية طرح كثيرات الحدود ليست ابدالية و لا تجميعية.

6. إذا كانت $f(x) = 2(x^3 -1)$ و كانت $g(x) = (2x-2)(x^2 + x + 1)$.
أثبت أن $f(x)= g(x)$

7. أوجد ناتج العملية في كل فرع مما يلي و اختصر الناتج:

(i $(4w^2-2w+3/2)+ (5w^3-7w-9/2)$

(ii $(7s^2 -4s+11) – (-2s^2+11s-8)$

(iii $(5x-7)(3x^6+2x^4+3x^3+ 4x^2+5)$

(iv $(3x-2)(4x+1)(5x-2)$

(v $(4v-5)(2v-1)(3v-4)$

(vii $(20x^3+ 2x^2+4x+20) \div (2x+3)$

(vii $(2x^4 -x^3-23x^2+9x+45) \div (2x^2-x-5)$

(viii $(x^5 -2) \div (x^2+2x+1)$

8. أوجد درجةَ و باقي قسمةِ $f(x)$ على $g(x)$ فيما يلي دون إجراء عملية القسمة الطويلة.

a. $f(x)= 2x^4-3x^3+6$ ، $g(x) = x-2$

b. $f(x)= 20x^3+2x^2+3x+20$ ، $g\ (x)= x+3$

الوحدة السادسة

المعادلات و المتباينات

(6-1) تحليل المقادير الجبرية

(6-2) المعادلات من الدرجة الأولى (الخطية)

(6-3) المعادلات من الدرجة الثانية (التربيعية)

(6-4) العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية و معاملاتها

(6-5) المتباينات

(6-6) الخواص الأساسية للمتباينات

(6-7) المتباينات الخطية

(6–8) المتباينات التربيعية

في مراحل التعليم قبل الجامعي يدرس الطالب بعض أنواع المعادلات و المتباينات وطرق حلها. في هذه الوحدة ندرس المعادلات و المتباينات في متغير واحد بصورة أكثر تفصيلا من حيث المقصود بها، أنواعها و طرق حلها.

في بداية هذه الوحدة نتناول بعض أهم المقادير الجبرية و طرق تحليلها و التي ستساعدنا في حل المعادلات و المتباينات.

(6–1) تحليل المقادير الجبرية

سنعرض بعض أهم أنواع المقادير الجبرية و ندرس كيفية تحليلها. سندرس تحليل كل من الفرق بين مربعين، المربع الكامل، مجموع و الفرق بين مكعبين و المقادير الجبرية الثلاثية. في البداية نذكر المقصود بالمقدار الجبري و نعدد بعض الأمثلة على المقادير الجبرية.

تعريف (1): المقدار الجبري عن ثابت أو متغير أو عمليات جبرية تشمل ثوابت و متغيرات.

مثال(1): المقادير التالية تسمى مقادير جبرية

$$2x,\ \ 3x+2y,\ \ 2y^2+5y+3,\qquad x^2-25y^2,$$

$$\sqrt{x^2+3y}\ ,\quad \frac{2x+3}{x+4},\quad 8x^3+125y^3$$

1. تحليل الفرق بين مربعين

المقدار الجبري الذي يكتب على الصورة (x^2-y^2) يسمى فرق بين مربعين و يمكن تحليله بالصورة التالية

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

مثال(2): حلل المقادير الجبرية التالية

1. x^2-25
2. x^2-81
3. x^6-36
4. $16x^4-64y^4$
5. $x^2y^4-z^2$

الحل: سنجيب على الفرعين الأول و الأخير و نترك بقية الأفرع كتمرين

1. $x^2-25=(x-5)(x+5)$
2. $x^2y^4-z^2=((xy^2)^2-z^2)=(xy^2-z)(xy^2+z)$

يمكن استخدام تحليل الفرق بين مربعين لتبسيط بعض المقادير الحسابية و الجبرية كما في المثال التالي.

مثال(3): استخدم التحليل لتبسيط المقادير التالية

1. $\frac{81-16}{64-9} = \frac{9^2-4^2}{8^2-3^2} = \frac{(9-4)(9+4)}{(8-3)(8+3)} = \frac{(5)(13)}{(5)(11)} = \frac{13}{11}$
2. $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = x-y$

2. تحليل المربع الكامل

المقدار الجبري الذي يكتب على الصورة $(x+y)^2$ أو $(x-y)^2$ يسمى مربع كامل و يمكن تحليله بالصورة التالية

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

مثال(4): حلل المقادير الجبرية التالية

1. $(x+3)^2$
2. $(x-5)^2$
3. $(2x+5y)^2$
4. $(3x-2y)^2$

الحل: سنجيب على الفرعين الأول و الثالث و نترك بقية الأفرع كتمرين

1. $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
2. $(2x+5y)^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2$

ملاحظة (1): المقدار الجبري الثلاثي $ax^2 + bx + c$ يكون مفكوك مربع كامل إذا حقق الشرطان التاليان

1. a و c أعداد موجبة و كل منها مقدار مربع.
2. $b = 2\sqrt{a}\,\sqrt{c}$

مثال (5): حدد أي من المقادير الجبرية التالية مفكوك مربع كامل

1. $x^2 + 4x + 4$
2. $4x^2 + 20x + 25$
3. $x^2 + 8x + 16$
4. $x^2 + 10x + 36$

الحل: سنجيب على الفرع الثالث و نترك بقية الأفرع كتمرين.

$$a = 1, \quad b = 8, \quad c = 16$$

$$2\sqrt{a}\,\sqrt{c} = 2\sqrt{1}\,\sqrt{16} = 8 = b$$

مما سبق نستنتج أن المقدار الثلاثي في الفرع الثالث يحقق الشرطين في ملاحظة (1) و بالتالي فإن المقدار مفكوك مربع كامل.

3. إكمال المربع

لكتابة المقدار الجبري الثلاثي $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ كحاصل جمع مربع كامل و عدد حقيقي نقوم بالخطوات التالية

1. نجمع و نطرح المقدار $\pm\frac{b^2}{4a}$.
2. $\left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$.
3. نبسط المقدار $\frac{b}{2\sqrt{a}}$.
4. نكتب المقدار بالصورة $\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

مثال(6): اكتب كل المقادير التالية باستخدام مربعات كاملة

1. $x^2 + 4x + 6$
2. $x^2 - 9x + 5$
3. $x^2 + 8x + 16$
4. $2x^2 - 6x + 1$
5. $3x^2 - 12x + 10$

الحل: سنجيب على الفرعين الثالث و الخامس نترك بقية الأفرع كتمرين

3. $a = 1,\ b = 8,\ c = 16$ و بالتالي، $\frac{b^2}{4a} = \frac{64}{4} = 16$،

$$\frac{b}{2\sqrt{a}} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x^2 + 8x + 16 = (x^2 + 8x) + 16 = (x^2 + 8x + 16) + (16 - 16)$$
$$= (x + 4)^2 + 0 = (x + 4)^2$$

وهذا يدل على أن المقدار في الفرع الثالث مربع كامل مما يؤكد ما أثبتناه سابقاً في مثال(5).

5. $a = 3,\ b = -12,\ c = 10$ و بالتالي، $\frac{b^2}{4a} = \frac{144}{12} = 12$،

$$\frac{b}{2\sqrt{a}} = \frac{-12}{2\sqrt{3}} = \frac{-6}{\sqrt{3}} = \frac{-6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}$$

$$3x^2 - 12x + 10 = (3x^2 - 12x) + 10$$
$$= (3x^2 - 12x + 12) + (10 - 12) = \left(\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\right)^2 - 2$$
$$= 3(x - 2)^2 - 2$$

4. تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما

المقدار الجبري الذي يكتب على الصورة $(x^3 + y^3)$ يسمى مجموع مكعبين، بينما المقدار الجبري الذي يكتب على الصورة $(x^3 - y^3)$ يسمى فرق بين مكعبين و يمكن تحليلهما بالصورة التالية

$$(x^3 + y^3) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

مثال (7): حلل المقادير الجبرية التالية:

1. $x^3 + 8$
2. $64x^3 + 125$
3. $8x^3 + 27$
4. $64x^3 - 125$
5. $x^3 - 8y^6$

الحل: سنجيب على الفرعين الثالث و الخامس و نترك بقية الأفرع كتمرين

3. $8x^3 + 27 = ((2x)^3 + 3^3) = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

5. $x^3 - 8y^6 = (x^3 - (2y^2)^3) = (x - 2y^2)(x^2 + 2xy^2 + 4y^4)$

بعد أن تعرضنا لبعض أنواع المقادير الجبرية وطرق تحليلها سندرس موضوع المعادلات في متغير واحد و طرق حلها و سندرس عدة أنواع من المعادلات وهي المعادلات من الدرجة الأولى (الخطية) و المعادلات من الدرجة الثانية (التربيعية). سنتعرف على بعض المفاهيم المرتبطة بالموضوع مثل مجموعة الحل.

(6-2) المعادلات من الدرجة الأولى (الخطية)

نتناول الآن المعادلات من الدرجة الأولى في متغير واحد وكيفية حلها ويسمى هذا النوع من المعادلات **بالمعادلات الخطية**. الشكل العام للمعادلة من الدرجة الأولى يكون كالتالي:

$$ax + b = 0, \qquad a, b \in \boldsymbol{R}, \qquad a \neq 0$$

و المقصود بحل المعادلة هو ايجاد قيمة المتغير x و الذى يسمى المجهول، و لحل هذا النوع من المعادلات نجعل المتغير x في طرف و معامله يساوي 1 وذلك بإضافة $(-b)$ لطرفي المعادلة وبعد ذلك نضرب طرفي المعادلة ب $\left(\frac{1}{a}\right)$ فيكون حل المعادلة على الصورة التالية

$$x = -\frac{b}{a}$$

و مجموعة الحل للمعادلة هي $\{-\frac{b}{a}\}$. و يطلق على حل المعادلة جذر المعادلة.

مثال (7): حل المعادلات التالية:

1. $2x + 4 = 0$
2. $3x - 2 = 5x + 4$

الحل:

1. $x = -\frac{4}{2} = -2$
2. في البداية نجمع المتغيرات في طرف واحد و الثوابت في الطرف الأخر

$$-2x = 6, \qquad x = \frac{6}{-2} = -3$$

ملاحظة (2): يمكن استخدام المعادلات من الدرجة الأولى في حل بعض المسائل اللفظية وذلك بتحويلها إلى معادلة ثم حلها.

مثال (8): عددان مجموعهما 60 و أحدهما يساوي ثلاثة أضعاف الآخر، فما هما العددان؟

الحل: نفرض أن العدد الصغير $= x$، فيكون العدد الأكبر $= 3x$

مجموع العددين $= 4x$، و نكون المعادلة التالية

$$4x = 60, \quad x = \frac{60}{4} = 15$$

إذا العدد الصغير $= 15$ و العدد الأكبر $= 45$.

(6-3) المعادلات من الدرجة الثانية (التربيعية)

نتناول الآن المعادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد وكيفية حلها ويسمى هذا النوع من المعادلات **بالمعادلات التربيعية**. الشكل العام للمعادلة التربيعية يكون كالتالي:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbf{R}, \qquad a \neq 0$$

للمعادلة التربيعية حلان (جذران) و توجد عدة طرق لحل هذا النوع من المعادلات منها، التحليل للعوامل الأولية، إكمال المربع و القانون العام وسنتناول فيما يلي هذه الطرق.

و في البداية نذكر تعريف مميز المعادلة التربيعية و هو عبارة عن المقدار،

$$b^2 - 4ac$$

و المميز يلعب دوراً مهماً في حل المعادلات التربيعية و تحديد نوع جذريها.

1. حل المعادلات التربيعية باستخدام التحليل للعوامل الأولية

هذه الطريقة تستخدم مع انواع خاصة من المعادلات التربيعية والتي يمكن تحليلها إلى عوامل أولية من الدرجة الأولى ثم حل كل معادلة من الدرجة الأولى وبذلك نحصل على حل المعادلة التربيعية. الآن ندرس بعض الامثلة التي توضح ذلك.

مثال (9): حل المعادلات التالية:

1. $9x^2 - 25 = 0$
2. $3x^2 + 10x = 0$
3. $x^2 + 5x + 6 = 0$

الحل:

1. $9x^2 - 25 = 0$

الطرف الأيسر من المعادلة عبارة عن فرق بين مربعين و بتحليله إلى عوامله نحصل على التالي:

$$(3x - 5)(3x + 5) = 0$$

و الآن هناك حالتان إما $3x - 5 = 0$ أو $3x + 5 = 0$ وحل هاتين المعادلتين يكون

$x = \frac{5}{3}$ أو $x = -\frac{5}{3}$.

مجموعة حل المعادلة $\left\{-\frac{5}{3}\ ,\ \frac{5}{3}\right\}$.

2. $3x^2 + 10x = 0$

في هذا النوع من المعادلات حيث لا يوجد حد مطلق فنأخذ x عامل مشترك ونحصل على التالي

$$x(3x + 10) = 0$$

و الآن هناك حالتان إما $x = 0$ أو $3x + 10 = 0$ و حل هاتين المعادلتين يكون

$x = 0$ أو $x = -\frac{10}{3}$.

مجموعة حل المعادلة $\left\{-\frac{10}{3}\ ,\ 0\right\}$.

3. $x^2 + 5x + 6 = 0$

يوجد نوع من المعادلات التربيعية و التي تتميز بأن مميزها عبارة عن مربع كامل والتي يمكن تحليلها لحاصل ضرب معادلتين خطيتين، و بحساب مميز المعادلة نجد أنه

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 = (1)^2$$

وهذه المعادلة يمكن تحليلها بالشكل التالي

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

و الأن هناك حالتان إما $x + 3 = 0$ أو $x + 2 = 0$ و حل هاتين المعادلتين يكون

$x = -3$ و $x = -2$.

مجموعة حل المعادلة $\{-2\ , -3\}$.

2. حل المعادلات التربيعية باستخدام طريقة اكمال المربع

توجد معادلات تربيعية يصعب تحليلها و خاصة تلك التي مميزها ليس مربع كامل و يمكن حلها باستخدام طريقة اكمال المربع التي سبق دراستها في بداية هذه الوحدة. سنعطي المثال التالي لتوضيح خطوات هذه الطريقة.

مثال (10): أوجد جذري المعادلة التالية:

$$3x^2 - 12x + 1 = 0$$

المعادلة السابقة يصعب تحليلها باستخدام الطرق السابقة لذلك سنستخدم طريقة اكمال المربع و في البداية نجعل المتغيرات في الطرف الأيسر من المعادلة و الحد الثابت بالطرف الأيمن، فتصبح على الصورة التالية:

$$3x^2 - 12x = -1$$

الخطوة الثانية نجعل معامل x^2 يساوي 1، وذلك بضرب طرفي المعادلة ب $\frac{1}{3}$ فتصبح كالتالي

$$x^2 - 4x = -\frac{1}{3}$$

ثم نضيف مربع نصف معامل x ويساوي $4 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2$ لطرفي المعادلة السابقة

$$x^2 - 4x + 4 = -\frac{1}{3} + 4 = \frac{11}{3}$$

الطرف الأيسر من المعادلة السابقة عبارة عن مفكوك مربع كامل و بكتابته على صورة المربع الكامل نحصل على المعادلة التالية

$$(x-2)^2 = \frac{11}{3}$$

بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة السابقة نحصل على التالي

$$(x-2) = \pm\sqrt{\frac{11}{3}}$$

و نحصل على جذري المعادلة التربيعية وهما

$$x = 2 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}$$

الجذر الأول $x = 2 - \sqrt{\frac{11}{3}}$ بينما الجذر الثاني $x = 2 + \sqrt{\frac{11}{3}}$

مجموعة الحل هي $\left\{2-\sqrt{\frac{11}{3}},\ 2+\sqrt{\frac{11}{3}}\right\}$.

3. حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام

استخدام القانون العام لحل المعادلات التربيعية يستخدم مع جميع المعادلات لسهولته وخاصة مع المعادلات التي لا يمكن تحليلها أو لصعوبته. والأن نوضح هذه الطريقة بالتفصيل.

لنفرض أن x_1 ، x_2 هما جذري المعادلة التربيعية التالية

$$ax^2+bx+c=0,\qquad a,b,c\in \mathbf{R},\qquad a\neq 0$$

فإن القانون العام يعطي قيم الجذرين كالتالي

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ,\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .$$

مثال (11): أوجد جذري المعادلة التالية باستخدام القانون العام.

$$3x^2-12x+1=0$$

الحل:

نوجد قيم العوامل $a=3,\ b=-12,\ c=1$.

باستخدام القانون العام

$$x_1=\frac{-(-12)-\sqrt{(-12)^2-4(3)(1)}}{2(3)}=\frac{12-\sqrt{144-12}}{6}$$

$$=2-\frac{\sqrt{132}}{6}=2-\frac{\sqrt{33}}{3}=2-\sqrt{\frac{11}{3}}.$$

$$x_2 = \frac{-(-12) + \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{12 + \sqrt{144 - 12}}{6}$$

$$= 2 + \frac{\sqrt{132}}{6} = 2 + \frac{\sqrt{33}}{3} = 2 + \sqrt{\frac{11}{3}}.$$

مجموعة الحل هي $\left\{2 - \sqrt{\frac{11}{3}},\ 2 + \sqrt{\frac{11}{3}}\right\}$ هي نفسها التي حصلنا عليها بطريقة اكمال المربع في مثال(9).

مثال (12): أوجد جذري المعادلة التالية باستخدام القانون العام.

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

الحل:

نوجد قيم العوامل $a = 1,\ b = -4,\ c = 4$.

باستخدام القانون العام

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{4 - \sqrt{16 - 16}}{2} = 2\,.$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{4 + \sqrt{16 - 16}}{2} = 2\,.$$

مجموعة الحل هي $\{\ 2\ \}$.

مثال (13): أوجد جذري المعادلة التالية باستخدام القانون العام.

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

الحل:

نوجد قيم العوامل $a = 1,\ b = -2,\ c = 5$.

باستخدام القانون العام

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{2 - \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 - \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{2 - 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i\ .$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{2 + \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 + \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{2 + 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i\ .$$

مجموعة الحل هي $\{1 - 2i,\ 1 + 2i\}$.

ملاحظة (3): توجد ثلاث حالات لجذور المعادلة التربيعية وذلك حسب قيمة مميزها $b^2 - 4ac$ و هي كالتالي:

1. إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ فإن جذري المعادلة يكونان عددين حقيقيين مختلفين كما في مثال (10).
2. إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ فإن جذري المعادلة يكونان عددين حقيقيين متساويين وقيمتهما تساوي $\frac{-b}{2a}$ كما في مثال (12).
3. إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ فإن جذري المعادلة يكونان عددين مركبين مترافقين كما في مثال (13).

(6-4) العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملاتها

نتناول الآن جانب مهم من المعادلات التربيعية و هو العلاقة بين جذريها ومعاملاتها. سندرس كيفية ايجاد مجموع الجذرين و حاصل ضربهما مباشرة من معاملات المعادلة التربيعية بدون معرفة الجذرين و في المقابل سندرس كيفية ايجاد المعادلة التربيعية إذا علمنا جذريها أو مجموعهما و حاصل ضربهما.

باستخدام القانون العام فإن جذري المعادلة التربيعية

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbf{R}, \qquad a \neq 0$$

يعطيان كالتالي

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

و بجمع الجذرين ينتج التالي

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

و بضرب الجذرين نحصل على التالي

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

نتيجة (1): مما سبق نستنتج أن

1. مجموع جذري المعادلة التربيعية $= -\frac{b}{a} = -\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } x^2}$.

2. حاصل ضرب جذري المعادلة التربيعية $= \frac{c}{a} = \frac{\text{الحد الثابت}}{\text{معامل } x^2}$.

3. بقسمة طرفي المعادلة التربيعية على a ، معامل x^2 تصبح المعادلة التربيعية على الصورة التالية

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

و باستخدام الفرعين السابقين فإنه يمكن كتابة المعادلة التربيعية بدلالة مجموع و حاصل ضرب جذريها كالتالي

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

مثال (13): أوجد مجموع و حاصل ضرب جذري المعادلة التالية

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

الحل:

نوجد قيم العوامل $a = 3,\ b = -6,\ c = 2$.

مجموع جذري المعادلة التربيعية يساوي $= -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{3} = 2$.

حاصل ضرب جذري المعادلة التربيعية يساوي $= \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$.

مثال (14): كون المعادلة التربيعية التي مجموعة حلها هي $\{3,\ 5\}$.

الحل:

مجموع الجذرين يساوي 8 و حاصل ضربهما يساوي 15، فتكون المعادلة كالتالي

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

(6-5) المتباينات

بعد أن تعرضنا لنوعين من المعادلات في متغير واحد و طرق حلها سنتناول موضوع المتباينات في متغير واحد و طرق حلها و سندرس عدة أنواع من المتباينات منها المتباينات الخطية، المتباينات التربيعية و المتباينات التي تحوي القيمة المطلقة وطرق حلها. سنتعرف على بعض المفاهيم المرتبطة بالموضوع و الخواص الأساسية للمتباينات.

تعريف (2): المتباينة هي عبارة عن جملة رياضية مكونة من مقدارين جبريين تربط بينهما إحدى العلاقات $\geq$ ، $>$ ، $\leq$ ، $<$.

مثال (14): من الأمثلة على المتباينات ما يلي

$2x + 4 < 8$ ، $x^2 - 1 \geq 0$ ، $5x + 3 \leq 2x + 6$

(6-6) الخواص الأساسية للمتباينات

تتمتع المتباينات بعدد من الخواص التي يجب مراعاتها عند اجراء الحسابات على المتباينات و حلها، و سنذكر فيما يلي هذه الخواص.

1. إذا كان $a,\ b \in \mathbf{R}$ بحيث أن $a < b$ فإن $a - b < 0$ أو $b - a > 0$ و هذا يعني أنه يوجد عدد حقيقي $c > 0$ بحيث أن $b = a + c$. فمثلا $5 < 11$ و يمكن كتابة 11 كالتالي $11 = 5 + 6$.

2. إذا كان $a,\ b \in \mathbf{R}$ فإن احدى العبارات الثلاث التالية تكون صحيحة

$$a = b, \qquad a < b, \qquad a > b$$

3. إذا كان $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$ بحيث أن $a > b$ و $b > c$ فإن $a > c$. هذه الخاصية تسمى خاصية التعدي، فمثلا $13 > 8$ و $8 > 5$ فإن $13 > 5$.

4. إذا كان $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$ بحيث أن $a < b$ فإن $a + c < b + c$، فمثلا $4 < 7$ و بإضافة 5 للطرفين فإن $4 + 5 < 7 + 5$.

5. إذا كان $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$ بحيث $a < b$ و $c > 0$ فإن $ac < bc$ ، فمثلا

$4 < 7$ و بضرب الطرفين ب 5 فإن $(5)(7) < (5)(4)$.

6. إذا كان $a, b, c \in \mathbf{R}$ بحيث $a < b$ و $c < 0$ فإن $ac > bc$ ، فمثلا

$4 < 7$ و بضرب الطرفين ب (-5) فإن $(-5)(7) < (-5)(4)$.

ملاحظة (4): مما سبق نلاحظ ما يلي:

1. إضافة أي عدد حقيقي لطرفي متباينة لا يغير من طبيعة العلاقة للمتباينة (تبقي العلاقة بين المقدارين كما هي).
2. ضرب عدد حقيقي موجب بطرفي متباينة لا يغير من طبيعة العلاقة للمتباينة (تبقي العلاقة بين المقدارين كما هي).
3. ضرب عدد حقيقي سالب بطرفي متباينة يغير من طبيعة العلاقة للمتباينة (تنقلب العلاقة بين المقدارين من أكبر من إلى أصغر من و بالعكس).

(6-7) المتباينات الخطية

تعريف (3): المتباينة الخطية هي عبارة عن متباينة طرفيها عبارة عن كثيرتي حدود من الدرجة الأولى أو ثوابت.

مثال (15): من الأمثلة على المتباينات الخطية ما يلي

$2x + 4 < 8$ ، $a \geq 0$ ، $5x + 3 \leq 2x + 6$.

سندرس الآن حل المتباينات الخطية من خلال عدة أمثلة

مثال (16): حل المتباينة $2x + 4 \geq 0$.

الحل:

$$2x + 4 - 4 \geq 0 - 4$$
$$2x \geq -4$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)2x \geq \left(\frac{1}{2}\right)(-4)$$
$$x \geq -2$$

مجموعة الحل $= [-2, \infty)$.

مثال (17): حل المتباينة $3x + 4 < 2x + 8$.

الحل:

$$3x + 4 - 2x < 2x + 8 - 2x$$
$$x + 4 < 8$$
$$x + 4 - 4 < 8 - 4$$
$$x < 4$$

مجموعة الحل $= (-\infty, 4)$.

مثال (18): أوجد مجموعة حل المتباينة $4 \leq 2x + 6 \leq 16$.

الحل: مجموعة حل المتباينة هي جميع قيم x التي تحقق المتباينة $2x + 6 \leq 16$ و المتباينة $4 \leq 2x + 6$. نحل كل متباينة على حدة ثم نوجد تقاطع مجموعتي حل المتباينتين فنحصل على مجموعة حل المتباينة الأصلية.

$$2x + 6 \leq 16$$
$$2x + 6 - 6 \leq 16 - 6$$
$$2x \leq 10$$
$$x \leq 5$$

مجموعة الحل $= (-\infty,\ 5]$.

$$4 \leq 2x + 6$$
$$4 - 6 \leq 2x + 6 - 6$$
$$-2 \leq 2x$$
$$-1 \leq x$$

مجموعة الحل $= [-1,\ \infty)$.

مجموعة حل المتباينة $= [-1,\ \infty) \cap (-\infty,\ 5] = [-1,\ 5]$.

(6-8) المتباينات التربيعية

المتباينة التي تحوي في طرفيها أو أ حدهما كثيرة حدود من الدرجة الثانية تسمى متباينة تربيعية.

مثال (19): من الأمثلة على المتباينات التربيعية ما يلي

$x^2 > 5$ ، $2x^2 + 3x < 2x + 1$ ، $x^2 + 4x \leq 2x^2 + 2x$.

سندرس الآن حل المعادلات التربيعية من خلال عدة أمثلة

مثال (20): حل المتباينة $x^2 + 2x + 1 \geq 0$.

الحل: نلاحظ أن الطرف الأيسر للمتباينة عبارة عن مربع كامل، و نكتب المتباينة على الصورة التالية:

$$(x + 1)^2 \geq 0$$

و المتباينة صحيحة لكل قيم x، و لذلك فإن مجموعة حل المتباينة هي كل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

مثال (21): حل المتباينة $4x^2 + 8x + 5 > 0$.

الحل: نكتب الطرف الأيسر للمتباينة بدلالة المربع الكامل و نكتب المتباينة على الصورة التالية:

$$\left(4x^2 + 8x + \frac{64}{16}\right) + \left(5 - \frac{64}{16}\right) > 0$$

$$(4x^2 + 8x + 4) + (5 - 4) > 0$$

$$(2x + 2)^2 + 1 > 0$$

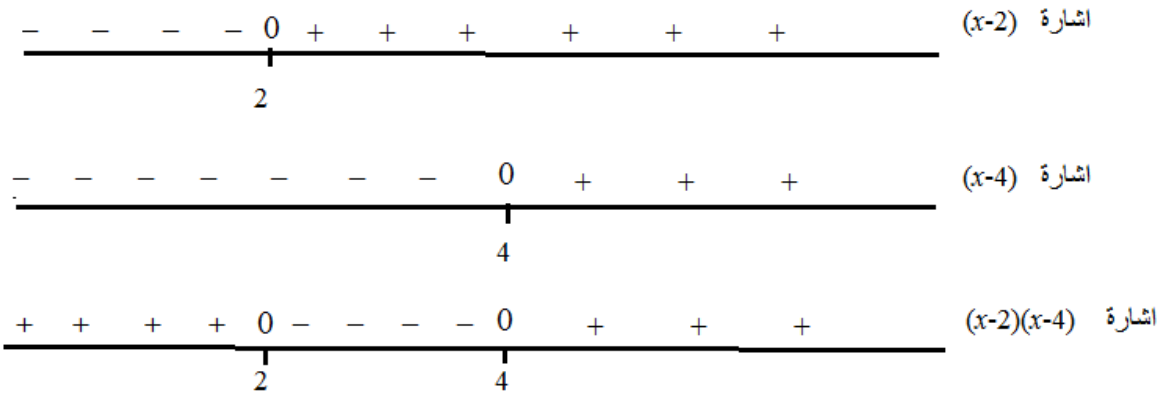
و الطرف الأيسر دائما موجب لكل قيم x، و لذلك فإن مجموعة حل المتباينة هي كل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

مثال (22): حل المتباينة $x^2 - 6x + 8 \leq 0$.

الحل: نحلل الطرف الأيسر للمتباينة لعوامله الأولية على الصورة التالية:

$$(x - 4)(x - 2) \leq 0$$

لان حاصل ضرب العاملين أقل من أو يساوي صفر فإن مجموعة حل المتباينة تكون قيم x التي تجعل العاملين قيمهم صفر ولهما إشارات مختلفة، لذلك نبحث اشارة العاملين $(x - 2)$، $(x - 4)$ و حاصل ضربهما، و من شكل (6-1) نجد أن مجموعة حل المتباينة هي $[2 , 4]$.



شكل (6-1): فحص اشارة المتباينة في مثال (22)

تمارين على الوحدة السادسة

1. بسط كلاّ من المقادير الجبرية التالية:

   a. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   b. $\frac{x^2-y^2}{x-y}$

2. حلل المقادير الجبرية التالية

   a. $3x^2 - 11x + 10$

   b. $(-3x - 5y)^2$

   c. $27x^3 - 8$

   d. $x^2 + 4x - 21$

   e. $6x^2 - 7x - 3$

3. اكتب كل المقادير الجبرية التالية باستخدام مربعات كاملة

   a. $x^4 + 6x^2 + 6$

   b. $2x^2 - 8x + 15$

4. عددان الفرق بينهما 33 و أكبرهما يساوي $\frac{3}{2}$ العدد الأصغر، أوجد العددين.

5. عدد ربعه يزيد عن ثمنه بمقدار 5، فما هو هذا العدد ؟

6. حل المعادلات التالية:

a. $3z + 25 = -2z + 35$

b. $2y - 5 = 4y + 9$

c. $3x^2 + 4x + 5 = 0$

d. $10x^2 + x - 4 = 0$

e. $25x^2 + 20x + 4 = 0$

7. أوجد مجموع و حاصل ضرب جذري المعادلات التالية:

a. $3x^2 + 4x + 5 = 0$

b. $2x^2 - 4x = -7$

c. $x^2 - 4x + 9 = 0$

d. $10x^2 + x - 4 = 0$

e. $25x^2 + 20x + 4 = 0$

f. $5x^2 + \sqrt{3}\,x - 10 = 0$

g. $x^2 + 4\,x + 8 = 0$

8. كون المعادلة التي مجموع جذريها 4 و حاصل ضربهما 1.

9. كون المعادلة التي جذراها كما يلي:

a. $-2,\ 3$

b. $2 \pm \sqrt{3}$

c. $2 \pm 3i$

10. أوجد مجموعة حل المتباينات التالية

a. $-2x + 8 \leq 10$

b. $x + 10 > 3x + 2$

c. $2x + 1 \leq 3x + 4 < 9$

d. $x^2 + 10x + 25 > 0$

e. $x^2 - 5x + 4 > 0$

f. $2x^2 + 6x + 7 < 0$

الوحدة السابعة

المنطق الرياضي

(7–1) العبارات المنطقية البسيطة و المركبة

(7–2) الروابط المنطقية و جداول الصدق

(7–3) العبارات المتكافئة و العبارات المتناقضة

المنطق هو العلم الذي يبحث في القواعد التي تتبع في التفكير وطرق الاستدلال الصحيح. وهو بذلك أداة للتفكير لأنه يعنى بتحليل طرق التفكير و صيانته من الخطأ. والعملية المنطقية تهتم بفئة من الصيغ أو العبارات.

(7-1) العبارات المنطقية البسيطة و المركبة

تعريف (1): العبارة هي جملة تقوم على علاقة بين عدد من الكلمات المفهومة.

وتنقسم إلى قسمين:

1. **العبارة الإخبارية أو المنطقية:** هي جملة خبرية تخبر عن شيء ما وتحتمل الصحة أو الخطأ وليس كليهما ويمكن التحقق من العبارة المنطقية فالجملة (المعادن تتمدد بالحرارة) جملة خبرية يمكن التحقق من صحتها بإجراء التجارب وإقرار صحة العبارة من خطئها. و من الأمثلة على العبارات المنطقية كذلك العبارات الآتية : المثلثات المتطابقة متكافئة، كل ما في الكون يجذب بعضه بعضا, طلبة الجامعة مجتهدون.

2. **العبارة الإنشائية** : وهي التي لا يمكن أن توصف بالصحة أو الخطأ مثل لا تمش في الأرض مرحا، 2+5 و خذ الكتاب.

مثال (1): صنف العبارات الآتية من حيث كونها منطقية أو إنشائية:

1. ابن تيمية صاحب كتاب رفع الملام عن الأئمة الأعلام.
2. ينزل المطر في الخريف .
3. لا تنه عن خلق وتأت بمثله .
4. كيف حالك ؟
5. قم بواجبك من فضلك.
6. إذا كان $x=9$ فإن $x^2 = 18$
7. أنقرة عاصمة تركيا و صنعاء عاصمة اليمن
8. ما أجمل بحر غزة !

نلاحظ أن العبارات المنطقية هي العبارات 1, 2, 6, 7 بينما العبارات الباقية إنشائية. كما نلاحظ أن العبارات 1 و 2 عبارات بسيطة تتضمن خبرا واحدا بينما العبارات 6 و 7 كل منهما يتكون من عبارتين بسيطتين.

تعريف (2): تسمى العبارة التي تتكون من عبارتين منطقيتين بسيطتين أو أكثر بالعبارة المنطقية المركبة.

وبذلك فإن العبارات المنطقية تنقسم إلى قسمين :

1. العبارة المنطقية البسيطة.
2. العبارة المنطقية المركبة.

للاختصار سوف نرمز للعبارة المنطقية البسيطة بأحد الحروف اللاتينية الكبيرة مثل: R ، Q و P كما سنرمز لصحة العبارة المنطقية بالرمز T و خطئها بالرمز F.

(2-7) الروابط المنطقية و جداول الصدق

الروابط المنطقية الأساسية هي:

1. رابط العطف " و" و رمزه " $\wedge$ ".
2. رابط التخيير " أو" و رمزه " $\vee$ ".
3. رابط النفي " غير صحيح أن ..." و رمزه " $\neg$ ".
4. رابط الاستلزام " إذا كان ... فإن ... " و رمزه " $\rightarrow$ ".
5. رابط التكافؤ" إذا وفقط إذا " و رمزه " $\leftrightarrow$ ".

تستخدم الروابط : " $\wedge$ " ، " $\vee$ " ، " $\rightarrow$ " و " $\leftrightarrow$ " للربط بين عبارتين منطقيتين بسيطتين للحصول على عبارة منطقية مركبة حيث تتوقف صحة العبارة المركبة و خطئها على صحة و خطأ كل من العبارات البسيطة و أداة الربط التي تربطهم. و فيما يأتي سندرس كلا من الروابط المنطقية السابقة بالتفصيل.

أولا: رابط العطف " و" و رمزه " $\wedge$"

يربط رابط العطف " و" بين عبارتين منطقيتين بسيطتين حيث نحصل على عبارة منطقية مركبة تكون صحيحة في حالة واحدة فقط , إ ذا كانت كل من العبارتين المنطقيتين البسيطتين صحيحة في نفس الوقت و تكون خاطئة في كل الحالات الأخرى.

و يمكننا توضيح قيم الصواب للعبارة المركبة $P \wedge Q$ من خلال الجدول الآتي و الذي يطلق عليه جدول الصدق للعبارة $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول (7−1): جدول الصدق للعبارة $P \wedge Q$

مثال (2): ما قيمة الصواب للعبارة: العدد 9 أولي و العدد 7 فردي؟

الحل:

نرمز للعبارة " العدد 9 أولي" بالرمز P و العبارة " العدد 7 فردي" بالرمز Q و بذلك تكون قيمة الصواب للعبارة $P \wedge Q$ حسب جدول الصدق F.

ثانيا: رابط التخيير " أو" و رمزه " $\vee$ "

يربط رابط التخيير " أو" بين عبارتين منطقيتين بسيطتين حيث نحصل على عبارة منطقية مركبة تكون صحيحة إ ذا كان أحد أو كلا من العبارتن المنطقيتين البسيطتين صحيحة، و تكون خاطئة في حالة واحدة فقط إذا كانت العبارتان المنطقيتان البسيطتان خاطئتين في نفس الوقت. و يمكننا توضيح قيم الصواب للعبارة المركبة $P \vee Q$ من خلال الجدول الآتي و الذي يطلق عليه جدول الصدق للعبارة $P \vee Q$.

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول (7−2): جدول الصدق للعبارة $P \vee Q$

مثال (3): ما قيمة الصواب للعبارة: العدد 9 أولي أو العدد 7 فردي؟

الحل: نرمز للعبارة " العدد 9 أولي" بالرمز P و العبارة " العدد 7 فردي" بالرمز Q و بذلك تكون قيمة الصواب للعبارة $P \vee Q$ حسب جدول الصدق T.

ثالثا: رابط النفي " غير صحيح أن ..." و رمزه " ¬ "

يمكن الحصول على عبارة جديدة من عبارة منطقية ما بإدخال رابط النفي عليها. حيث إن نفي العبارة المنطقية هي العبارة المنطقية التي تكون صحيحة إذا كانت العبارة المنطقية خاطئة و خاطئة إذا كانت العبارة المنطقية صحيحة. و إذا كانت لدينا العبارة P و نريد أن ننفيها نقرأها " ليس P" أو "غير صحيح أن P". و يمكننا توضيح قيم الصواب للعبارة المنطقية $\neg P$ من خلال الجدول الآتي و الذي يطلق عليه جدول الصدق للعبارة $\neg P$

P	$\neg P$
T	F
F	T

جدول (7-3): جدول الصدق للعبارة $\neg P$

مثال (4): انف العبارات الأتية و اذكر قيمة الصدق لكل منها.

i. العدد 1 أولي.

ii. كل الأعداد موجبة.

iii. 12=7+5.

iv. العدد 3 عامل من عوامل العدد 651.

الحل:

P	قيمة الصواب	$\neg P$	قيمة الصواب
العدد 1 أولي	F	العدد 1 ليس أولياً	T
كل الأعداد موجبة	F	ليس كل الأعداد موجبة	T
12=7+5	T	$12 \neq 7 + 5$	F
العدد 3 عامل من عوامل العدد 651	T	العدد 3 ليس عاملاً من عوامل العدد 651	F

ملاحظة (1): من الخطأ أن نقول أن نفي العبارة " كل الأعداد موجبة " هي العبارة " كل الأعداد سالبة "

رابعا: رابط الاستلزام " إذا كان ... فإن... " و رمزه " ⟶"

يربط رابط الاستلزام " إذا كان ... فإن ... " بين عبارتين منطقيتين بسيطتين P و Q حيث نحصل على عبارة منطقية مركبة نرمز لها بالرمز $P \longrightarrow Q$ تكون خاطئة في حالة واحدة فقط إ ذا كانت P صحيحة و Q خاطئة و تكون صحيحة في كل الحالات الأخرى.

و يمكننا توضيح قيم الصواب للعبارة المركبة $P \longrightarrow Q$ من خلال الجدول الآتي و الذي يطلق عليه جدول الصدق للعبارة $P \longrightarrow Q$

P	Q	$P \longrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

جدول (7-4): جدول الصدق للعبارة $P \longrightarrow Q$

مثال(5): ما قيمة الصواب للعبارة: إذا كان العدد 9 أولي فإن العدد 7 فردي؟

الحل: نرمز للعبارة " العدد 9 أولي" بالرمز P و العبارة " العدد 7 فردي" بالرمز Q و بذلك تكون قيمة الصواب للعبارة $P \longrightarrow Q$ حسب جدول الصدق T.

خامسا: رابط التكافؤ" إذا وفقط إذا " و رمزه " $\leftrightarrow$"

يربط رابط التكافؤ " إذا وفقط إذا " بين عبارتين منطقيتين بسيطتين P و Q حيث نحصل على عبارة منطقية مركبة نرمز لها بالرمز $P \leftrightarrow Q$ تكون صحيحة إذا و فقط إ ذا كانت Q و P صحيحتين معا أو خاطئتين معا. وتكون خاطئة في الحالات الأخرى.

و يمكننا توضيح قيم الصواب للعبارة المركبة $P \leftrightarrow Q$ من خلال الجدول الآتي و الذي يطلق عليه جدول الصدق للعبارة $P \leftrightarrow Q$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

جدول (7-5): جدول الصدق للعبارة $P \leftrightarrow Q$

مثال(6): ما قيمة الصواب للعبارة: العدد 9 أولي إذا وفقط إذا كان العدد 7 فردي؟

الحل: نرمز للعبارة " العدد 9 أولي" بالرمز P و العبارة " العدد 7 فردي" بالرمز Q و بذلك تكون قيمة الصواب للعبارة $P \leftrightarrow Q$ حسب جدول الصدق F.

ملاحظة (2): ليس من الضروري أن تحتوي العبارات المركبة على عبارتين بسيطتين P و Q فقط و بينهما رابط و إنما يمكن الحصول على عبارة مركبة من عدة عبارات بسيطة و عدة روابط متكررة و لكن في هذه الوحدة سنكتفي بدراسة العبارات المركبة التي تحتوي على ثلاث عبارات بسيطة كحد أقصى.

في حالة وجود ثلاث عبارات بسيطة P و Q و R في العبارة المركبة ، يصبح جدول الصدق يحتوي على ثمانية صفوف لكي نغطي جميع الحالات الممكنة.

مثال(7): اكتب جدول الصدق للعبارات الآتية:

1. $P \longrightarrow (Q \vee R)$.
2. $P \wedge (\neg Q \leftrightarrow R)$.

الحل:

1.

P	Q	R	$(Q \vee R)$	$P \longrightarrow (Q \vee R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	F	T

.2

P	Q	R	$\neg Q$	$(\neg Q \leftrightarrow R)$	$P \wedge (\neg Q \leftrightarrow R)$
T	T	T	F	F	F
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F

(7-3) العبارات المتكافئة و العبارات المتناقضة

تكون العبارتان المركبتان متكافئتين إذا كانتا مكونتين من العبارات البسيطة نفسها و لهما قيم الصواب نفسها بينما تكون العبارتان المركبتان متناقضتين إذا كانتا مكونتين من العبارات البسيطة نفسها و لهما عكس قيم الصواب .

مثال(8): أثبت صحة ما يلي:

1. العبارتان المركبتان $P \wedge \neg Q$ و $\neg(P \longrightarrow Q)$ متكافئتان.

2. العبارتان المركبتان $Q \neg \vee \neg P$ و $\neg(P \wedge Q)$ متكافئتان.

3. العبارتان المركبتان $P \wedge Q$ و $\neg P \vee \neg Q$ متناقضتان.

4. ا العبارتان المركبتان $((P \longrightarrow Q) \wedge (P \longrightarrow R))$ و $\neg(P \longrightarrow (Q \wedge R))$ متناقضتان.

الحل: سنحل فقط الفرع الأول و سنترك بقية الأفرع كتمرين. من جدول الصدق التالي و من العمودين المظللين نلاحظ أن العبارتين في الفرع الأول متكافئتان. بالمثل أجب عن بقية الأفرع في السؤال.

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$P \to Q$	$\neg(P \to Q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F

تمارين على الوحدة السابعة

1. عين العبارات فيما يلي و اذكر قيمة الصواب لكل منها:

a. 8+1>9.

b. العدد 1 عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب.

c. 339 تقبل القسمة على 3.

d. $x + 4 = 7$.

e. العدد 9816 يقبل القسمة على 4.

f. اغلق الباب.

g. لماذا الاصرار على الخطأ.

h. الولد شجاع.

i. انف كل عبارة مما يلي:

j. العدد 2 عدد أولي.

k. العدد 6 عامل من عوامل العدد 9.

2. ما قيمة الصواب لكل من العبارات المركبة الآتية:

a. إذا كان العدد 1 عنصرا محايدا لعملية الجمع, فإن 2=1+2.

b. $7 \geq 7$.

c. العدد 3 عدد فردي أولي.

d. العدد 7 عامل من عوامل 21 و العدد 3 عامل من عوامل العدد 5.

e. إذا كان العددان 3,5 فرديين , فإن 3+5 عدد فردي.

f. $4 > 5$ أو $5 > -4$.

g. العدد 8 عدد فردي أو زوجي.

h. العدد 9 فردي إذا و فقط إذا كان العددان 4, 5 فرديين.

i. ليس (1+2=7 أو 3+2=5).

3. أكتب جدول الصدق لكل عبارة مما يلي:

a. $\neg P \vee Q$.

b. $(\neg P) \wedge (\neg Q)$.

c. $P \rightarrow (\neg Q)$.

d. $\neg(P \vee (\neg Q))$.

e. $((P \vee Q) \wedge (\neg Q)) \rightarrow P$.

f. $(P \rightarrow (\neg Q)) \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$.

4. أي من القضايا الآتية متكافئة و أيها متناقضة و أيها ليست متكافئة و لا متناقضة.

a. $P \vee (Q \vee R), \quad (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

b. $(P \leftrightarrow Q), \quad (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge (\neg Q))$.

c. $P \rightarrow (Q \wedge R), \quad (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$.

d. $(P \leftrightarrow Q), \quad (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$.

e. $P \rightarrow (Q \vee R), \quad P \wedge (\neg(Q \vee R))$.

5. أثبت أن العبارة الآتية صحيحة دوما:

a. $P \vee (\neg P)$.

b. $P \rightarrow (P \vee Q)$.

c. $P \vee (P \rightarrow Q)$.

6. أجب عن بقية الافرع في مثال (8)

أسئلة عامة

السؤال الاول:

إذا كانت $U = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ و $A = \{a,\ b,\ d\}$ و $B = \{b,\ d,\ e\}$ و $C = \{b,\ c,\ e\}$

أوجد كلاّ مما يأتي

a. $A \cap (B \cup C)$

b. $(A - B)^C$

c. $C \cup (A \cap B)^C$

السؤال الثاني:

أ. استخدم اشكال فن لتوضيح صحة المتطابقة التالية لأي مجموعتين A و B

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

ب. ظلل شكل فن الذي يمثل $C \cap (A - B)$

السؤال الثالث:

أ. اكتب المقادير الآتية في أبسط صورة (بدون استخدام الآلة الحاسبة) مع توضيح خطوات الحل.

i. $\sqrt[4]{0.0256}$

ii. $\dfrac{4^{3/2} \cdot 15^3}{6^3 \cdot 5^4}$

iii. $(\frac{-27}{125})^{1/3}$

ب. حلل المقادير الجبرية الآتية:

i. $9x^6 - 4y^2$

ii. $6x^2 - 7x - 3$

iii. $8x^3 + 27$

السؤال الرابع:

أ. أوجد ناتج العمليات الحسابية التالية مع توضيح خطوات الحل:

a. $\frac{5}{8} \cdot \left(\frac{7}{9} - \frac{2}{3} \right)$

b. $3\frac{4}{5} \div \left(2\frac{3}{5} + 4\frac{3}{10} \right)$

c. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\, i \right) + (8 - 4\, i)$

d. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, i \right)(5 + 11\, i)$

e. $\frac{(3+i)(2-i)}{1+i}$

f. $\left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right| \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$

ب. مثل كلاّ من الأعداد التالية على خط الأعداد مع توضيح خطوات الحل.

$\sqrt{54}$ ، $\sqrt{28}$ ، $\sqrt{17}$

ت. رتب الأعداد التالية تصاعديا $\frac{8}{6}, \quad -\frac{12}{5}, \quad \sqrt{5}, \quad \frac{5}{3}$

ث. مثل الأعداد المركبة التالية بيانيا

$2 + i, \quad -1 - 1.5i, \quad 5i, \quad -4 + 2i$

السؤال الخامس:

1. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1875 و 975.
2. أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 1875 و 975.

السؤال السادس:

إذا كانت $A = \{-2,\ 1,\ 3\ \}$ و $B = \{\ 7,\ 3,\ -3,\ 8\ \}$ و $f: A \to B$ معرفة كالتالي $f(x) = 2x + 1$

أ. أثبت أن f اقتران من A إلى B.

ب. هل الاقتران f اقتران تقابل؟ وضح سبب اجابتك.

السؤال السابع:

1. أوجد ناتج و باقي قسمة $f(x) = 8x^2 + 6x^3 + 4x + 1$ على $g(x) = 2x^2 + 1$.
2. أوجد ناتج و باقي قسمة $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 1$ على $g(x) = x - 2$.

السؤال الثامن:

إذا كانت $A = \{0, 1, 2\ \}$ و $R = \{\ (x, y) \in A \times A: x + y \leq 4\ \}$

1. اكتب عناصر العلاقة R.
2. هل العلاقة R تمثل علاقة تكافؤ على المجموعة A ؟ وضح السبب و إذا كان الجواب بنعم، أوجد جميع صفوف التكافؤ للعلاقة R.

السؤال التاسع: اكتب جدول الصدق للعبارات الآتية :

1. $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow (Q \vee P))$

2. $(P \vee Q) \rightarrow (P \leftrightarrow (Q \vee P))$

السؤال العاشر:

إذا كانت $A = \{2,3,4,5\}$ ، $B = \{3,6\}$ و $C = \{2,4\}$ أوجد كل من

a. $(A - C) \times B$ و مثله باستخدام الجدول.

b. $P(A)$.

السؤال الحادي عشر: أوجد مجموعة حل المعادلات التالية

a. $x + 4 = 3x - 5$

b. $x^2 + 6x = 7x - 4$

c. $3y^2 - 2y + 8 = 4y$

d. $x^2 + 2x - 4 = 0$

السؤال الثاني عشر: أوجد مجموعة حل المتباينات التالية

a. $3x + 4 < 2x - 5$

b. $x^2 + 2x \geq 0$

c. $\frac{2x+1}{3} > 7$

d. $x(x + 3) - 3 \geq 2x^2 - 2$

السؤال الثالث عشر: ضع علامة √ أو × أمام العبارات التالية:

1. ( ) الاقترانان اللذان لهما نفس المجال و المدى متساويان.

2. ( ) صفوف التكافؤ تكون غير خالية دائما.

3. ( ) كل عدد نسبي هو عدد صحيح.

4. ( ) العدد $\frac{2}{3}$ أصغر من العدد $\frac{7}{11}$.

5. ( ) الجملة " الطقس جميل" تعتبر عبارة منطقية.

6. ( ) لكل عدد حقيقي x يوجد معكوس ضربي $\frac{1}{x}$.

7. ( ) ميل الخط المستقيم $2x + 4y = 4$ يساوي $-\frac{1}{2}$.

8. ( ) إذا كانت $A = \{1, \{2\}, \{3,4\}\}$ فإن $\{2\} \in A$.

9. ( ) الجملة " $x^2 + 6x + 5 = 0$" تعتبر عبارة منطقية.

10. ( ) إذا كانت $A = \{1, \{2\}, \{3,4\}\}$ فإن $\{3,4\} \subseteq A$.

11. ( ) العبارة $P \wedge \neg P$ تناقض.

12. ( ) لأي مجموعتين A و B يكون $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

13.( ) إذا كانت A ، B و C مجموعات، فإن
$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

14.( ) لا يمكن أن تكون العلاقة تماثلية و تخالفية في نفس الوقت.

15.( ) كل علاقة تمثل اقتران و لكن ليس كل اقتران يمثل علاقة.

16.( ) $x^2-8x+5=(x-4)^2-11$.

17.( ) العبارة $P\wedge(\neg p)$ عبارة صحيحة دائما.

18.( ) العبارتان $P\to(Q\vee R)$, $\neg(P\to(Q\vee R))$ متناقضتان .

19.( ) إذا كان $|A|=4$ و $|B|=2$, فإن $|A\cup B|=6$.

20.( ) قيمة الصواب للعبارة ($(-2\frac{3}{5})=(-\frac{7}{5})$ و 7 عدد فردي) هي F .

21.( ) الجملة " العدد 15 فردي و يقبل القسمة على 5" تعتبر عبارة مركبة.

22.( ) $(-\infty,0]\cap(0,\infty)=\phi$.

23.( ) العبارة $P\vee Q$ تكافئ ¬P ∧ ¬Q .

24.( ) إذا كانت $A=\{1,2,\{4\},6,\ 8\}$ فإن $\{2,4\}\subseteq A$.

25.( ) الفترة $[a,\ b)$ هي $\{x\in\mathbf{R}:a<x\leq b\}$.

السؤال الرابع عشر: اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة لكل من العبارات التالية:

1. العلاقة "$\geq$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية علاقة

أ) ليست تخالفيه ب) تكافؤ ج) ترتيب د) تماثلية

2. العدد الكسرى $-11\frac{7}{9}$ يساوى العدد النسبي

أ) $-\frac{106}{9}$ ب) $-\frac{91}{9}$ ج) $\frac{91}{-9}$ د) $\frac{106}{9}$

3. $(3,\ 8) \cap [5,8]$ تساوى

أ) $(3,8)$ ب) $(3,8]$ ج) $(5,\ 8]$ د) $[5,\ 8)$

4. إذا كانت X مجموعة الأعداد الزوجية التي تقبل القسمة على 3 فإن

أ) $|X| = 0$ ب) $|X| = 1$ ج) $|X| = 2$ د) ليس مما ذكر

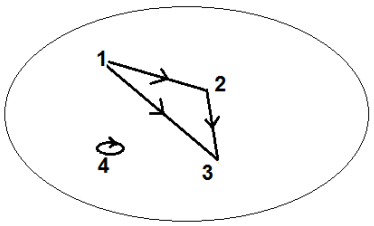
5. إذا كان $|X| = 5$ فإن $|P(X)|$ تساوى

أ) 25 ب) 10 ج) 32 د) 64

6. رأس المنحنى $y = 3x^2 - 6x + 1$ هو

أ) $(-1,\ 10)$ ب) $(-1,\ -2)$ ج) $(1,-2)$ د) $(1,2)$

7. R علاقة معرفة على المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$ ممثلة بالمخطط السهمي التالي فإنها



أ) علاقة تعدى ب) علاقة انعكاس ج) علاقة تماثلية د) ليست علاقة تخالف

8. الاقتران $R:\{1,2\}\to\{a,b,c\}$ حيث $R=\{(1,a)\ ,\ (2,b)\}$

أ) تقابل ب) شامل و ليس متباين

ج) متباين و ليس شامل د) ليس متباين و ليس شامل

9. الاقتران $f(x)=2x-x^2$ يمثل قطع مكافئ

أ) مفتوح للأسفل و رأسه $(1,1)$ ب) مفتوح للأسفل و رأسه $(0,0)$

ج) مفتوح للأعلى و رأسه $(1,1)$ د) مفتوح للأعلى و رأسه $(\frac{1}{4},\frac{7}{16})$

10. الاقتران $f(x)=4$ يمثل معادلة مستقيم

أ) يوازي محور السينات ب) يوازي محور الصادات

ج) ميله موجب د) يمر بالنقطة (0 , 0)

11. الاقتران $2x-3y=6$ يمثل معادلة مستقيم

أ) يقطع محور الصادات في النقطة $(0,-2)$ و يقطع محور السينات في النقطة $(3,0)$

ب) يقطع محور الصادات في النقطة $(3,0)$ و يقطع محور السينات في النقطة $(0,-2)$

ج) يقطع محور الصادات في النقطة $(0,2)$ و يقطع محور السينات في النقطة $(-3,0)$

د) لا يقطع محور الصادات و لا محور السينات.

12. إذا كان ق. م. أ. $(m,n)=4$ و حاصل ضرب $m.n=-96$

فإن م. م. أ. $(m,n)=$

أ) 12 ب) 24 ج) -12 د) -24

13. درجة الاقتران $f(x)=(x^2-1)^2(5x+3)+(2x+1)$ هي

أ) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6

14. المقدار $x^3+2x^4-5\sqrt{x}+4$ هو

أ) كثير حدود من الدرجة الرابعة ب) كثير حدود من الدرجة الثالثة

ج) كثير حدود المعامل الرئيسي له 4 د) ليس كثير حدود

15. باقي قسمة الاقتران $f(x)=5x^7-3x^3+4x^2+1$ على $g(x)=x+1$ هو

أ) 3 ب) 7 ج) -3 د) ليس أيا مما سبق

16. إذا كانت درجة المقسوم عليه = 4 و درجة المقسوم = 8 فإن درجة ناتج القسمة =

أ) 12 ب) 2 ج) 32 د) 4

17. كل المقادير الجبرية التالية مربع كامل عدا

أ) $x^2 + 2x + 1$ ب) $x^2 + 4x + 5$

ج) $4x^2 + 4x + 1$ د) $4x^2 + 4xy + y^2$

18. مدي الاقتران $f(x) = x^2 - 1$ يساوي

أ) $\mathbf{R}$ ب) $[-1, \infty)$

ج) $(-\infty, -1]$ د) $[-1, 0]$

19. قيمة العدد i^{27} تساوي

أ) 1 ب) -1

ج) $-i$ د) i

20. إذا كان $z = 2 - i$ فإن z^{-1} يساوي

أ) $\frac{2}{5} + \frac{i}{5}$ ب) $\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$

ج) $-\frac{2}{5} + \frac{i}{5}$ د) $-\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$

21. قيمة $(3 + i)\overline{(3 + i)}$ تساوي

أ) $\sqrt{10}$ ب) 10

ج) 6 د) $2i$

المراجع

قائمة بالمراجع العربية

1- دهبي ، نورة ، الرياضيات ، دار الصفاء للنشر و التوزيع- عمان-الأردن، 2008.

2- شطناوي, فاضل سلامة, أسس الرياضيات و المفاهيم الهندسية الأساسية, دار المسيرة للنشر و التوزيع و الطباعة, الأردن – عمان, الطبعة الأولى, 2008.

3- صبرا، رمضان ، عثمان،أحمد ، موسى،غريب ، زريقات، روز ، الرياضيات العامة، دار المناهج للنشر و التوزيع-عمان-الأردن، 1997.

4- طبش, خليل اسماعيل, مبادئ الرياضيات العامة, الجامعة الاسلامية, غزة, الطبعة الأولى, 2013.

5- العزة، حسن و شوافقة، نبيل و الربضي، هارون، رياضيات عامة، منشورات جامعة القدس المفتوحة، 1997.

6- عزام، مفيد و عوض، عدنان و أمين، وائل، أساسيات الرياضيات، منشورات جامعة القدس المفتوحة، الطبعة الثانية، 2007.

7- عوض، عدنان و عزام، مفيد و علاونة، أحمد ، مبادئ الرياضيات، دار الفكر، عمان، الأردن، 1990.

8- عوض، عدنان و عزام، مفيد و علاونة، أحمد ، مبادئ الرياضيات، دار الفكر للنشر و التوزيع ، عمان، الأردن، 1990.

9- عوض، عدنان و عزام، مفيد و علاونة، أحمد ، التفاضل و التكامل و الهندسة التحليلية، الجزء الأول، دار الفكر للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، 1990.

قائمة بالمراجع الأجنبية

1- Churchil, Ruel v. and Brown, W. James, Complex Variables and Applications, 4th edition, Mc-Graw-Hill, 1984.

دليل المصطلحات العلمية

انجليزي – عربي

-A-

Absolute	مطلقة
Algebraic	جبري
Addition	جمع

-C-

Complement	متممة (مكملة)
Co-Domain	المجال المقابل
Common divisor	القاسم المشترك
Constant	ثابت
Complex number	عدد مركب
Conjugate	مرافق

-D-

Domain	المجال
Degree	درجة
Disjoint sets	مجموعات منفصلة
Difference	الفرق
Distribution law	قانون التوزيع
Division	القسمة

-E-

Element	عنصر
Empty set	المجموعة الخالية
Equivalence relation	علاقة تكافؤ
Equation	معادلة
Exponential	أسى

-F-

Function	اقتران

-G-

Group	مجموعة
Greatest common divisor	القاسم المشترك الأكبر

-I-

Intersection	تقاطع
Interval	فترة
Imaginary number	عدد تخيلي
Integers	مجموعة الأعداد الصحيحة
Irrationals	مجموعة الأعداد الغير نسبية
Inverse	النظير (المعكوس)
Inequality	متباينة
Identity function	الاقتران المحايد

- L –

Line	مستقيم (خط)
Logical	منطق
Least common multiple	المضاعف المشترك الأدنى (الأصغر)

Length	طول

-M-

Magnitude	مقياس
Multiplication Rule	قاعدة الضرب

-N-

Number sets	مجموعات الأعداد
Natural numbers	الأعداد الطبيعية

-O-

Odd Number	العدد الفردي
One to one function	اقتران تقابل
Onto function	اقتران شامل
Operations	العمليات

-P-

Polynomial	كثيرة الحدود
Power set	مجموعة القوة

-Q-

Quadratic function	اقتران تربيعي

-R-

Range	المدى
Real	حقيقي
Rational numbers	الأعداد النسبية
Real line	خط الأعداد الحقيقية
Relation	العلاقة
Reflexive relation	علاقة انعكاسية
Root	جذر

-S-

Set	المجموعة
Subset	مجموعة جزئية
Subtraction	طرح
Symmetric relation	علاقة تماثلية
Simple statement	عبارة بسيطة

-T-

Transitive relation	علاقة تعدي

-U-

Union	الاتحاد
Universal set	المجموعة الشاملة

-V-

Venn diagrams	أشكال ڤن

-X-

محور السينات	X-axis

-Y-

محور الصادات	Y-axis

View publication stats